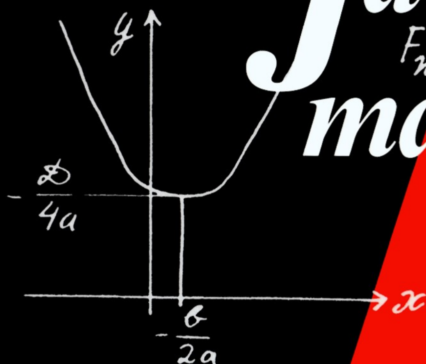


$$xf(x)+2f(1-x)=x^2+6$$

$$\sqrt{x^2+(8-y)^2}+\sqrt{y^2+(6-x)^2}$$

Jaunajam matematikui



$$F_n \approx \frac{\alpha^n}{\sqrt{5}}$$

$$\frac{AB}{BC}=\frac{BC}{AC}$$

LIETUVOS
JAUNŲJŲ
MATEMATIKŲ
MOKYKLA
LJMM

$$f(x)=|x-1|+|x+1|$$

$$\pi^2(k+1)^2-\pi^2k^2=\pi^2(2k+1)$$

$$1=4\sin\frac{\pi}{10}\left[1-2\sin^2\frac{\pi}{10}\right].$$

$$m_3=m_{12}+m_{13}+m_{23}$$

LIETUVOS JAUNŲJŲ MATEMATIKŲ MOKYKLA

Jaunajam matematikui

7

2004–2006 metų
Lietuvos jaunųjų matematikų mokyklos
užduotys ir jų sprendimai

Danieliaus leidykla

Vilnius, 2006

UDK 51(079)
Ja 712

Leidinio sudarytojai:
Antanas APYNIS
Eugenijus STANKUS
Juozas ŠINKŪNAS

Leidinį redagavo Joana PRIBUŠAUSKAITĖ

Maketavo Kristina LYNDIENĖ

ISBN 9955-476-40-0

TURINYS

PRATARMĖ

Šioje septintojoje Lietuvos jaunųjų matematikų mokyklos knygelėje „Jaunajam matematikui“ yra pateikta 2004–2006 mokslo metais nagrinėtų temų metodinė medžiaga, užduotys LJMM klausytojams ir jų sprendimai.

Knygelės turinį sudaro šios temos: skaičių dalumas, dalumo požymiai (E. Stankus); nelygybės geometrijoje (E. Mazėtis); kraštinio elemento principas (J. Šinkūnas); indukcijos principas (A. Apynis, E. Stankus); grafai, Oilerio formulė (L. Maliaukienė, J. Šinkūnas); taškų geometrinės vietos (J. Vainavičienė); aibės, taikymo uždaviniai (A. Apynis); išvestinės ir integralai (A. Skūpas). Skaitytojas taip pat ras 2004 metų stojamąją užduotį ir jos sprendimą bei 2006 metų baigiamosios užduoties pavyzdį.

Kad būtų lengviau naudotis knygelėmis „Jaunajam matematikui“, šio leidinio paskutiniuose puslapiuose yra įdėtas ankstesnių šešerių LJMM mokslo metų temų sąrašas.

Nuoširdžiai dėkojame straipsnių autoriams ir redaktorei Joanai Pribušauskaitei.

Taip pat tariame nuoširdų ačiū kolegei Kristinai Lyndienei už tekstų rinkimą ir maketavimą.

Antanas Apynis,
Eugenijus Stankus,
Juozas Šinkūnas

Metodinė medžiaga ir užduotys



STOJAMOJI UŽDUOTIS

Antanas Apynis, Eugenijus Stankus (Vilniaus universitetas), Juozas Šinkūnas (Vilniaus pedagoginis universitetas)

1. Raskite mažiausią triženklį skaičių, lygų jo vienetų skaitmens kubui.

2. Ar galima skaičius 1, 2, 3, ..., 21 suskirstyti į tris grupes taip, kad kiekvienoje grupėje didžiausias skaičius būtų lygus likusių skaičių sumai?

3. Reiškinį

$$x^4 + 2004x^2 + 2003x + 2004$$

išskaidykite dauginamaisiais.

4. Raskite natūraliųjų skaičių m ir n poras (m, n), su kuriomis galioja lygybė

$$mn^2 + 3n^2 - m = 108.$$

Nurodymas. Lygties kairiąją pusę išskaidykite dauginamaisiais.

5. Išspręskite lygčių sistemą

$$\begin{cases} 2(x+y) = 5xy, \\ 8(x^3 + y^3) = 65. \end{cases}$$

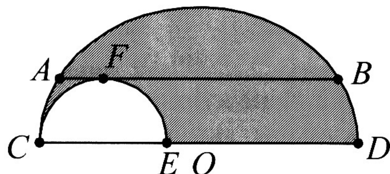
6. Fermeris iš banko paėmė kreditą dvejiems metams sutaręs mokėti tam tikrą palūkanų procentą. Po metų fermeris grąžino bankui $\frac{3}{4}$ sumos, kurią jis tuo metu buvo skolingas bankui, o dar po metų sumokėjo likusią skolą, kuri sudarė 36% paimtojo kredito. Koks buvo sutartas banko palūkanų procentas?

Pastaba. Pagal sutartį fermeriui palūkanos prie skolos priskaičiuojamos vieną kartą per metus (pirmą kartą – praėjus vieneriems metams nuo kredito paėmimo, antrą kartą – po dvejų metų).

7. Teniso turnyre dalyvavo 18 tenisininkų. Kiekvienam tenisininkui buvo priskirtas jo eilės numeris. Po to burtais jie buvo suskirstyti į 9 grupes po 2. Pasirodo, kad kiekvienos grupės tenisininkų

numerių suma yra natūraliojo skaičiaus kvadratas. Koks tenisininko, kuris yra vienoje grupėje su tenisininku Nr. 1, eilės numeris?

8. Styga $AB = 12$ cm lygiagreti su apskritimo skersmeniu CD ir liečia mažąjį pusapskritimį. Apskaičiuokite figūros, apribotos pusapskritimių lankais $CABD$ ir CFE bei atkarpa ED, plotą (brėžinyje užbrūkšniuota).



9. Taškas M yra trapecijos $ABCD$ ($AD \| BC$) kraštinės CD vidurio taškas. Atkarpa AM įstrižainę BD kerta taške E. Raskite trapecijos plotą, jeigu $S_{AEB} = 15\ cm^2$ ir $AE : EM = 3 : 1$.

10. Iš visų stačiakampių gretasienių, kurių pagrindo perimetras 24 cm, o vienos sienos perimetras 36 cm, aibės raskite mažiausią įstrižainę turinčio gretasienio tūrį.



I. SKAIČIŲ DALUMAS, DALUMO POŽYMIAI

Eugenijus Stankus
(Vilniaus universitetas)

Viena iš seniausių matematikos šakų – skaičių teorija. Ji nagrinėja įvairias skaičių savybes, tačiau bene svarbiausios yra skaičių dalumo savybės.

Žymėkime, kaip įprasta, $N = \{1, 2, 3, ...\}$ – natūraliųjų skaičių aibę, $Z = \{..., -2, -1, 0, 1, 2, ...\}$ – sveikųjų skaičių aibę.

Dešimtainė pozicinė skaičiavimo sistema. Mes jau seniai įpratę natūraliesiems ir sveikiesiems skaičiams užrašyti vartoti dešimtainę skaičiavimo sistemą. Šios sistemos pagrindas yra skaičius 10. Natūralusis skaičius n užrašomas vartojant skaitmenis 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 tokiu būdu: $n = \overline{a_k a_{k-1} ... a_1 a_0}$. Čia kiekvienas skaitmuo pagal savo vietą reiškia atitinkamai a_0 – vienetų skaičių, a_1 – dešimčių skaičių ir t. t.; a_k rodo kiek yra 10^k laipsnių:

$$n = a_k \cdot 10^k + a_{k-1} \cdot 10^{k-1} + ... + a_1 \cdot 10^1 + a_0 \cdot 10^0. \quad (1)$$

Pavyzdžiui, užrašas $n = 74832$ iš tikrųjų reiškia skaičių

$$n = 7 \cdot 10^4 + 4 \cdot 10^3 + 8 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10^1 + 2 \cdot 10^0.$$

Vartojamos ir kitos skaičiavimo sistemos. Pavyzdžiui, kompiuterių moksle labai svarbi dvejetainė sistema, kurios pagrindas yra 2. Natūralusis skaičius n šioje sistemoje užrašomas panašiai: $n = \overline{a_k a_{k-1} ... a_1 a_0}$. Tik čia galimi skaitmenys yra 0 ir 1:

$$n = a_k \cdot 2^k + a_{k-1} \cdot 2^{k-1} + ... + a_1 \cdot 2^1 + a_0 \cdot 2^0.$$

Pavyzdžiui, dešimtainės sistemos skaičius 25, užrašytas dvejetaine sistema, yra 11001. Iš tikrųjų

$$25 = 1 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0.$$

Rašysime: $25_{(10)} = 11001_{(2)}$.

Sveikųjų skaičių dalumas. Tarkime, a ir b – sveikieji skaičiai, $b \neq 0$. Jeigu yra toks sveikasis skaičius q, su kuriuo teisinga lygybė $a = bq$, tuomet sakoma, kad *a dalijasi iš b* arba *b dalija a* ir žymima $b \backslash a$. Skaičiai b ir q vadinami skaičiaus *a dalikliais*, o skaičius a yra skaičiaus *b kartotinis*. Nesunkiai įrodysime tokias dalumo savybes.

1. Jeigu a yra skaičiaus m kartotinis, o m yra skaičiaus b kartotinis, tai skaičius a yra skaičiaus b kartotinis.

Įrodymas. Kadangi $a = mq_1$, $m = bq_2$, tai $a = bq_1q_2$, t. y. skaičius a yra skaičiaus b kartotinis.

2. Jeigu žinome, kad lygybės

$$a_1 + a_2 + ... + a_m = b_1 + b_2 + ... + b_n \qquad (2)$$

kairiosios ir dešiniosios pusės visi dėmenys, išskyrus kurį nors vieną, yra skaičiaus c kartotiniai, tai ir pastarasis dėmuo yra skaičiaus c kartotinis.

Įrodymas. Tarkime, kad $a_2, ..., a_m, b_1, b_2, ..., b_n$ yra skaičiaus c kartotiniai, t. y. $a_2 = cq_2, ..., a_m = cq_m, b_1 = cl_1, b_2 = cl_2, ..., b_n = cl_n$. Įrašę šias išraiškas į (2) lygybę ir išreiškę a_1, gauname:

$$a_1 = c(l_1 + l_2 + ... + l_n - q_2 - ... - q_m),$$

t. y. a_1 yra skaičiaus c kartotinis.

3. Jei $a \setminus b_1, a \setminus b_2, ..., a \setminus b_n$, tai $a \setminus (b_1 + b_2 + ... + b_n)$.

Įrodymas. Kadangi $b_1 = aq_1, b_2 = aq_2, ..., b_n = aq_1$, tai

$$b_1 + b_2 + ... + b_n = a(q_1 + q_2 + ... + q_n),$$

t. y. suma $b_1 + b_2 + ... + b_n$ dalijasi iš a.

Dalyba su liekana.

Teorema. Tarkime, a ir b – sveikieji skaičiai, $b \neq 0$. Tuomet yra tokie vieninteliai skaičiai q ir r, $0 \leq r < |b|$, su kuriais galioja lygybė

$$a = bq + r. \qquad (3)$$

Skaičius q vadinamas *dalmeniu*, o r – *liekana*.

Įrodymas. Aišku, kad skaičių q ir r, $0 \leq r < |b|$, vieną porą, su kuria galioja (3) lygybė, surasime. Reikia skaičių q paimti tokį, kad bq būtų pats didžiausias skaičiaus b kartotinis, neviršijantis skaičiaus a.

Įrodysime, kad tokie skaičiai q ir r yra vieninteliai. Tarkime, kad dar yra kiti skaičiai q_1 ir r_1, $0 \leq r_1 < |b|$, su kuriais galioja lygybė $a = bq_1 + r_1$. Tuomet iš šios lygybės atėmę (3) gausime

$0 = b(q_1 - q) + r_1 - r$. Iš įrodytosios 2 dalumo savybės išplaukia, kad $(r_1 - r)$ yra skaičiaus b kartotinis. Kita vertus, $|r_1 - r| < b$, nes šis skirtumas yra dviejų teigiamų skaičių, mažesnių už b, skirtumas. Toks skaičius (kuris yra b kartotinis ir yra mažesnis už b) gali būti tik nulis. Taigi $r_1 - r = 0$, o tuomet ir $q_1 - q = 0$. Vadinasi, $r_1 = r$, $q_1 = q$.

Kaip pasirinktiesiems sveikiesiems skaičiams a ir b praktiškai surasti skaičius q ir r, $0 \le r < |b|$, kad galiotų (3) lygybė? – Galima taikyti visiems žinomą dalybos kampu algoritmą. Panagrinėkime keletą pavyzdžių.

Dalydami kampu skaičių 127 iš 13, gausime, kad $127 = 13 \cdot 9 + 10$. Taigi $q = 9, r = 10$.

Atkreipkime dėmesį į atvejus, kai $a < 0, b > 0$ arba $a > 0, b < 0$, arba $a < 0, b < 0$.

Pavyzdžiui, kai $a = -127, b = 13$, tai $-127 = 13 \cdot (-10) + 3$, vadinasi, $q = -10, r = 3$.

Jeigu $a = 127, b = -13$, tuomet $127 = (-13) \cdot (-9) + 10$, taigi $q = -9$, $r = 10$.

Kai $a = -127$, $b = -13$, turėsime $-127 = (-13) \cdot 10 + 3$, ir $q = 10$, $r = 3$.

Kiekvienu atveju bq yra pats didžiausias skaičiaus b kartotinis, neviršijantis skaičiaus a.

Lyginiai. Dabar panagrinėkime sveikuosius skaičius palygindami liekanas, gaunamas dalijant šiuos skaičius iš kokio nors pasirinkto natūraliojo skaičiaus.

Apibrėžimas. Jei sveikuosius skaičius a ir b dalijant iš natūraliojo skaičiaus m gaunama ta pati liekana, tai sakoma, kad *a lygsta b moduliu m* (žymima $a \equiv b(\bmod m)$).

Įrodysime kelias naudingas lyginių savybes.

1. Lyginys $a \equiv b(\bmod m)$ galioja tik tuomet, kai skirtumas $a - b$ dalijasi iš m.

Įrodymas. Jei $a \equiv b(\bmod m)$, t. y. $a = mq_1 + r$ ir $b = mq_2 + r$, tai $a - b = m(q_1 - q_2)$. Taigi ($a - b$) dalijasi iš m.

Atvirkščiai, jei $m \setminus (a-b)$, o $b = mq_1 + r_1$, tai

$$a - b = mq \Rightarrow a = b + mq \Rightarrow a = mq_1 + r_1 + mq \Rightarrow a = m(q_1 + q) + r_1 .$$

Vadinasi, a dalydami iš m taip pat gausime liekaną r_1.

Išvada. $a \equiv b(\mathrm{mod}\, m) \Leftrightarrow a - b \equiv 0(\mathrm{mod}\, m)$ (lyginyje, kaip ir lygtyje, jo narys gali būti perkeltas į kitą lyginio pusę pakeičiant šio nario ženklą priešingu).

2. Jei $a \equiv b(\mathrm{mod}\, m)$, tuomet $ac \equiv bc(\mathrm{mod}\, m)$ ir $a + c \equiv$ $\equiv b + c(\mathrm{mod}\, m)$ su bet kuriuo $c \in Z$ (lyginio abi puses galima padauginti iš sveikojo skaičiaus, taip pat prie lyginio kiekvienos pusės galima pridėti sveikąjį skaičių).

Įrodymas. $a \equiv b(\mathrm{mod}\, m) \Leftrightarrow a - b = mq \Rightarrow ac - bc = mqc \Rightarrow$
$\Rightarrow ac \equiv bc(\mathrm{mod}\, m)$.
$a \equiv b(\mathrm{mod}\, m) \Leftrightarrow a - b = mq \Rightarrow (a + c) - (b + c) = mq \Rightarrow$
$\Rightarrow a + c \equiv b + c(\mathrm{mod}\, m)$.

3. Jei $a_1 \equiv b_1(\mathrm{mod}\, m)$ ir $a_2 \equiv b_2(\mathrm{mod}\, m)$, tai $a_1 + a_2 \equiv$ $\equiv b_1 + b_2(\mathrm{mod}\, m)$ (du lyginius galima sudėti).

Įrodymas.
$a_1 \equiv b_1(\mathrm{mod}\, m)$, $a_2 \equiv b_2(\mathrm{mod}\, m) \Leftrightarrow a_1 = b_1 + mq_1$,
$a_2 = b_2 + mq_2 \Rightarrow a_1 + a_2 = b_1 + b_2 + m(q_1 + q_2) \Rightarrow$
$a_1 + a_2 \equiv b_1 + b_2(\mathrm{mod}\, m)$.
Išvada. Galima sudėti bet kokį lyginių skaičių.

4. Jei $a_1 \equiv b_1(\mathrm{mod}\, m)$ ir $a_2 \equiv b_2(\mathrm{mod}\, m)$, tai $a_1 \cdot a_2 \equiv$ $\equiv b_1 \cdot b_2(\mathrm{mod}\, m)$ (du lyginius galima sudauginti).

Įrodymas.
$a_1 \equiv b_1(\mathrm{mod}\, m)$, $a_2 \equiv b_2(\mathrm{mod}\, m) \Leftrightarrow$
$a_1 = b_1 + mq_1$, $a_2 = b_2 + mq_2 \Rightarrow a_1 \cdot a_2 = (b_1 + mq_1)(b_2 + mq_2) \Rightarrow$
$a_1 \cdot a_2 \equiv b_1 \cdot b_2 + m(b_1 q_2 + b_2 q_1 + mq_1 q_2) \Rightarrow a_1 \cdot a_2 \equiv b_1 \cdot b_2(\mathrm{mod}\, m)$.
Išvada. $a \equiv b(\mathrm{mod}\, m) \Rightarrow a^k \equiv b^k(\mathrm{mod}\, m)$ su $k \in N$.

Lyginių savybės ypač naudingos, kai operuojama dideliais skaičiais. Pavyzdžiui, kai pats skaičius turi daug skaitmenų (ir todėl jo neįmanoma užrašyti dešimtaine skaičiavimo sistema), tai remiantis lyginių savybėmis vis dėlto galima nustatyti, koks šio skaičiaus paskutinis ar priešpaskutinis skaitmuo. Taip pat galima surasti liekaną, kurią gautume šį skaičių dalydami iš kurio nors natūraliojo skaičiaus. Panagrinėkime keletą pavyzdžių.

Pavyzdžiai.

1. Raskime liekaną, kurią gautume skaičių $a = 12^8 - 14^9 + 15^5$ padalinę iš 9.

Sprendimas. $12 \equiv 3(\mathrm{mod}\,9) \Rightarrow 12^2 \equiv 3^2(\mathrm{mod}\,9) \Rightarrow$

$12^2 \equiv 0(\mathrm{mod}\,9) \Rightarrow 12^8 \equiv 0(\mathrm{mod}\,9)$;

$14 \equiv 5(\mathrm{mod}\,9) \Rightarrow 14^2 \equiv 5^2(\mathrm{mod}\,9) \Rightarrow 14^2 \equiv -2(\mathrm{mod}\,9) \Rightarrow$

$\Rightarrow 14^4 \equiv 4(\mathrm{mod}\,9) \Rightarrow 14^8 \equiv -2(\mathrm{mod}\,9) \Rightarrow 14^9 \equiv -10(\mathrm{mod}\,9) \Rightarrow$

$\Rightarrow 14^9 \equiv -1(\mathrm{mod}\,9) \Rightarrow -14^9 \equiv 1(\mathrm{mod}\,9)$;

$15 \equiv 6(\mathrm{mod}\,9) \Rightarrow 15^2 \equiv 6^2(\mathrm{mod}\,9) \Rightarrow 15^2 \equiv 0(\mathrm{mod}\,9) \Rightarrow$

$\Rightarrow 15^4 \equiv 0(\mathrm{mod}\,9) \Rightarrow 15^5 \equiv 0(\mathrm{mod}\,9)$.

Sudėję gautuosius lyginius $12^8 \equiv 0(\mathrm{mod}\,9)$, $-14^9 \equiv 1(\mathrm{mod}\,9)$ ir $15^5 \equiv 0(\mathrm{mod}\,9)$, turėsime $a \equiv 1(\mathrm{mod}\,9)$. Taigi skaičių a dalydami iš 9 gausime liekaną 1.

2. Raskime skaičiaus $a = (1234)^{56789}$ paskutinįjį skaitmenį.

Sprendimas. Atkreipkime dėmesį, kad natūraliojo skaičiaus paskutinysis skaitmuo yra liekana, gauta šį skaičių dalijant iš 10. Taigi ieškosime skaičiaus a dalybos iš 10 liekanos. Pirmiausia $1234 \equiv 4(\mathrm{mod}\,10)$. Todėl turime rasti liekaną, gautą skaičių 4^{56789} dalijant iš 10. Kadangi

$$4^2 \equiv 6(\mathrm{mod}\,10),\ 4^{2k} \equiv 6^k \equiv 6(\mathrm{mod}\,10),\ k \in N,$$

tai $4^{56789} = (4^2)^{28394} \cdot 4 \equiv 6 \cdot 4 \equiv 4(\mathrm{mod}\,10)$. Vadinasi, skaičiaus a paskutinysis skaitmuo yra 4.

3. Raskime skaičiaus $a = 2^{2004}$ paskutinįjį skaitmenį.

Sprendimas. $2^{2004} = (2^4)^{501} \equiv 6^{501} \equiv 6(\mathrm{mod}10)$.

Kai sveikuosius skaičius dalijame iš natūraliojo skaičiaus m (dalybos su liekana algoritmu), galime gauti įvairių liekanų, kurių iš viso skirtingų yra $m-1$. Tai skaičiai – 0 (kai skaičius dalijasi iš m), $1, 2, 3, ..., m-1$.

Pagrindinė aritmetikos teorema. Nagrinėjant natūraliųjų skaičių savybes labai svarbūs *pirminiai skaičiai* – tokie natūralieji skaičiai, kurie dalijasi tik iš savęs ir iš vieneto (pats vienetas nelaikomas pirminiu skaičiumi).

Pagrindinė aritmetikos teorema teigia, kad bet kuris natūralusis skaičius n vieninteliu būdu išreiškiamas pirminių skaičių sandauga (jei nekreipiama dėmesio į dauginamųjų tvarką).

Jei skaičiaus n pirminius daliklius pažymėsime p_1, p_2, ..., p_m, tai skaičių n galima užrašyti formule

$$n = p_1^{k_1} \cdot p_2^{k_2} \cdot ... \cdot p_m^{k_m};$$

čia $k_1, k_2, ..., k_m$ yra teigiami patys didžiausi laipsnio rodikliai, su kuriais skaičius n iš šių laipsnių dalijasi. Pavyzdžiui, $12 = 2^2 \cdot 3$, $2205 = 3^2 \cdot 5 \cdot 7^2$.

Šitoks natūraliųjų skaičių išskaidymas tik iš pirmo žvilgsnio atrodo paprastas. Jeigu skaičiai dideli, tai gauti tokį skaidinį gana sudėtinga netgi pasitelkiant kompiuterį, nes reikia nustatyti, iš kurių pirminių duotasis skaičius dalijasi, o iš kurių ne. Kita vertus, taip pat sunku nustatyti, ar pasirinktasis skaičius yra pirminis, ar *sudėtinis* (nėra pirminis). Šie klausimai domina daugelį matematikų (siūlome žvilgterėti į interneto svetainę http://www.utm.edu/research/primes/largest.html).

Natūraliųjų skaičių dalumo požymiai. Jeigu nagrinėjami ne ypač dideli skaičiai, tai jų dalumą iš kai kurių skaičių galima nustatyti pasitelkus dalumo požymius. Kai kuriuos iš jų čia panagrinėsime.

1. Jeigu skaičiaus paskutinysis skaitmuo yra lyginis, t. y. 0, 2, 4, 6 arba 8, tuomet šis skaičius dalijasi iš 2.

Ir atvirkščiai, jeigu skaičius dalijasi iš 2, tai jo paskutinysis skaitmuo yra lyginis.

Įrodymas. Tokio skaičiaus išraiškos (1) lygybe paskutinis skaitmuo $a_0 = 0, 2, 4, 6, 8$. Kadangi visi kiti dėmenys dalijasi iš 2, tai pagal trečią dalumo savybę iš 2 dalijasi ir duotasis skaičius.

Jeigu skaičius dalijasi iš 2, tai iš (1) lygybės pagal antrą dalumo savybę iš 2 dalijasi ir paskutinis skaitmuo.

2. Jei skaičiaus paskutinysis skaitmuo yra 0 arba 5, tai šis skaičius dalijasi iš 5.

Įrodykite savarankiškai.

3. Jeigu skaičiaus skaitmenų suma dalijasi iš 3, tuomet ir šis skaičius dalijasi iš 3.

Jeigu skaičiaus skaitmenų suma dalijasi iš 9, tai ir šis skaičius dalijasi iš 9.

Įrodymas. Atkreipkime dėmesį, kad

$$10 \equiv 1(\mathrm{mod}\,3), 10^2 \equiv 1(\mathrm{mod}\,3), ..., 10^k \equiv 1(\mathrm{mod}\,3),$$

taip pat

$$10 \equiv 1(\mathrm{mod}\,9), 10^2 \equiv 1(\mathrm{mod}\,9), ..., 10^k \equiv 1(\mathrm{mod}\,9).$$

Tuomet iš (1) formulės ir trečiosios lyginių savybės gauname:

$$n \equiv a_k + a_{k-1} + ... + a_1 + a_0(\mathrm{mod}\,3).$$

Taip pat ir

$$n \equiv a_k + a_{k-1} + ... + a_1 + a_0(\mathrm{mod}\,9).$$

Vadinasi, jei skaitmenų suma dalijasi iš 3 (iš 9), tai ir pats skaičius dalijasi iš 3 (iš 9).

Galioja ir atvirkščias teiginys: jei skaičius dalijasi iš 3 (iš 9), tai ir jo skaitmenų suma dalijasi iš 3 (iš 9).

4. Natūralusis skaičius $n = 10a + b,\ 0 \le b < 10,\ a \in Z$, dalijasi iš 7 tik tada, kai $a - 2b$ dalijasi iš 7.

Įrodymas. Tarkime $a - 2b$ dalijasi iš 7. Skaičių $n = 10a + b$ užrašykime taip:

$$n = 10a + b = 17(a - 2b) + 7(5b - a). \qquad (4)$$

Abu šio skaičiaus dėmenys dalijasi iš 7, todėl ir n dalijasi iš 7.

Iš tos pačios (4) lygybės pagal antrąją dalumo savybę išplaukia ir atvirkščias teiginys.

Didžiausias bendras daliklis ir mažiausias bendras kartotinis. Dabar, kai žinome kai kuriuos dalumo požymius, natūralųjį skaičių (bent jau nelabai didelį) išdėstyti pirminiais dauginamaisiais lengviau. O turint kelių natūraliųjų skaičių, pavyzdžiui, a, b ir c, išraiškas pirminiais dauginamaisiais, nesunku surasti jų didžiausią bendrą daliklį $DBD(a,b,c)$ bei mažiausią bendrą kartotinį $MBK(a,b,c)$. Pavyzdžiui, tegu

$$a = 2646 = 2\cdot 3^3\cdot 7^2,$$
$$b = 21609000 = 2^3\cdot 3^2\cdot 5^3\cdot 7^4,$$
$$c = 13377 = 3\cdot 7^3\cdot 13.$$

Tuomet

$$DBD(a,b,c) = 3\cdot 7^2 = 147,$$
$$MBK(a,b,c) = 2^3\cdot 3^3\cdot 5^3\cdot 7^4\cdot 13 = 842751000.$$

Kai $DBD(a,b)=1$, tai a ir b vadinami *tarpusavyje pirminiais skaičiais*.

Apie skaičių dalumą taip pat galima paskaityti Lietuvos jaunųjų matematikų mokyklos leidinyje „Jaunajam matematikui 3“, Vilnius: Danieliaus leidykla, 2002.

PIRMOJI UŽDUOTIS

1. Datą 2004.12.10 užrašykite dvejetaine išraiška.

2. Raskite skaičius q ir r, $0 \le r < |b|$, su kuriais galioja lygybė $a = bq + r$, kai:

1) $a = -86350$, $b = 284$;

2) $a = 7342$, $b = -46$;

3) $a = -75840$, $b = -3215$.

3. Raskite liekaną, kurią gautume skaičių $12^{13} + 15^{10} - 14^8$ padaliję iš 7.

4. Raskite skaičiaus $3^{2004} + 7^{2005}$ paskutinįjį skaitmenį.

5. Suformuluokite ir įrodykite natūraliojo skaičiaus dalumo iš 11 požymį.

6. Skaičius $n = 10a + b$, $0 \le b < 10$, $a \in Z$, dalijasi iš 13 tik tada, kai $a + 4b$ dalijasi iš 13. Įrodykite šį dalumo požymį.

7. Suraskite skaičių $a = 2132$, $b = 1599$ ir $c = 9061$ didžiausią bendrą daliklį ir mažiausią bendrą kartotinį.

8. Suraskite visas tarpusavyje pirminių skaičių poras (m,n), su kuriomis galioja lygybė

$$\frac{m+n}{m^2 + m \cdot n + n^2} = \frac{3}{13}.$$

9. Įrodykite, kad skaičius $n(n^2 - 7)$ su visais natūraliaisiais n dalijasi iš 6.

Nurodymas. Patikrinkite, ar ši savybė galioja su visomis skaičiaus n dalybos iš 6 liekanomis.

10. Suraskite visų sveikųjų skaičių x, tenkinančių lyginį $4x \equiv 5 (\mathrm{mod}\, 7)$, aibę.



II. NELYGYBĖS GEOMETRIJOJE

Edmundas Mazėtis
(Vilniaus pedagoginis universitetas)

Matematikos pamokose Jūs įrodinėjote įvairias skaitines nelygybes, sprendėte tiesines, kvadratines, racionaliąsias, iracionaliąsias nelygybes, kuriose kintamieji įgyja tam tikras skaitines reikšmes. Skirtingai nuo skaitinių nelygybių, geometrijoje nagrinėjamos nelygybės, siejančios atkarpų ilgius, kampų didumus, plotus, tūrius ir kitus geometrinius dydžius. Nagrinėdami geometrines nelygybes, taikome ne tik žinomas skaitines nelygybes, bet ir tiriamųjų geometrinių figūrų savybes. Apie tai plačiau susipažinsite atlikdami šią užduotį.

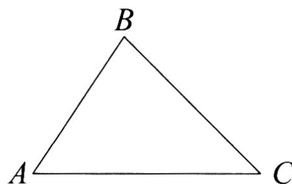
Pradėsime nuo trikampio nelygybės.

Bet kuri trikampio kraštinė yra trumpesnė už likusių kraštinių sumą (žr. 1 pav.).

$AB < AC + BC$,

$AC < AB + BC$,

$BC < AB + AC$.



1 pav.

Iš trikampio nelygybės išplaukia tokios išvados:

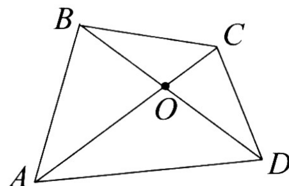
1 išvada. *Bet kuri trikampio kraštinė yra ilgesnė už kitų kraštinių skirtumo modulį.*

2 išvada. *Bet kuri daugiakampio kraštinė yra trumpesnė už likusių to daugiakampio kraštinių sumą.*

3 išvada. *Jei trims atkarpoms AB, BC ir AC teisinga lygybė* $AB + BC = AC$ *, tai taškai A, B ir C yra vienoje tiesėje, be to, taškas B yra atkarpoje AC.*

1 pavyzdys. Įrodysime, kad iškilojo keturkampio dviejų priešingų kraštinių suma mažesnė už įstrižainių sumą.

Sakykime, kad iškilojo keturkampio $ABCD$ įstrižainės AC ir BD kertasi taške O (2 pav.) Trikampiams AOB ir COD pritaikę trikampio nelygybę, gauname, kad $AB < AO + OB$, $CD < CO + OD$. Sudėję šias nelygybes, turime



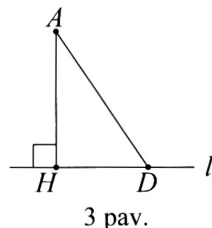
2 pav.

$$AB + CD < (AO + OB) + (CO + OD) = (AO + OC) + (BO + OD) =$$
$$= AC + BD.$$

2 pavyzdys. Jei trikampio kraštinėms a, b ir c teisinga nelygybė $a^2 + b^2 > 5c^2$, tai c yra trumpiausia trikampio kraštinė. Įrodysime tai.

Tarkime priešingai, kad kraštinė c nėra trumpiausia, t. y. $c \geq a$. Pridėję prie abiejų nelygybės pusių c, gauname $2c \geq a + c$. Kadangi $a + c > b$, tai iš čia $2c > b$. Iš nelygybių $c \geq a$ ir $2c > b$ gauname $c^2 \geq a^2$, $(2c)^2 > b^2$. Sudėję matome, kad $5c^2 > a^2 + b^2$, o ši nelygybė prieštarauja uždavinio sąlygoje duotai nelygybei. Taigi teiginys, kad c nėra trumpiausia trikampio kraštinė, yra klaidingas.

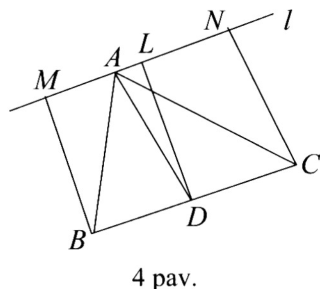
Dažnai ieškant geometrinių uždavinių sprendinių, pasižyminčių ekstremaliomis savybėmis, tikslinga naudoti tokią nelygybę: jei AH yra statmena tiesei l, o AD – pasviroji (žr. 3 pav.), tai $AH < AD$. Lygybė $AH = AD$ yra teisinga tik tada, kai taškai H ir D sutampa.



3 pav.

3 pavyzdys. Per trikampio ABC viršūnę A nubrėžta tiesė l. Jei šios tiesės atstumų iki trikampio viršūnių B ir C suma mažiausia, tai tiesė l statmena trikampio pusiaukraštinei AD. Įrodysime tai.

Nuleiskime statmenis BM ir CN iš trikampio viršūnių B ir C į tiesę l (4 pav.). Keturkampis $BCNM$ yra trapecija, taškas D yra jos šoninės kraštinės vidurio taškas. Jei DL – trapecijos vidurinė linija, tai $DL \perp l$ ir $BM + CN = 2DL$. Kadangi DL yra statmena tiesei l, o DA – pasviroji, tai $DL \leq DA$; lygybė $DL = DA$ teisinga tik tada, kai taškai L ir A sutampa, t. y., kai tiesės DA ir l statmenos.

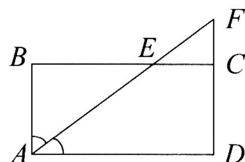


4 pav.

Nelygybės tarp aritmetinių ir geometrinių vidurkių taip pat dažnai padeda sprendžiant geometrinius uždavinius. Prisiminsime šias nelygybes ir kartu pateiksime jų geometrinę interpretaciją.

Bet kuriems dviems teigiamiems skaičiams a ir b teisinga nelygybė

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}.$$



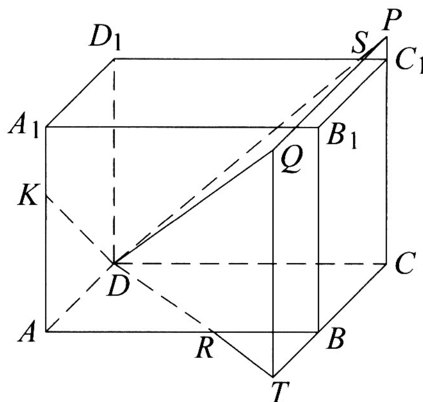
5 pav.

Sakykime, kad $ABCD$ – stačiakampis, kurio kraštinių ilgiai x ir y (5 pav.). Kampo A pusiaukampinė su tiesėmis BC ir CD kertasi taškuose E ir F. Kadangi $\angle BAE = 45^\circ$, tai $\angle AEB = 45^\circ$ ir $AB = BE = x$. Analogiškai $AD = DF = y$. Tuomet trikampio ABE plotas lygus $\frac{1}{2}x^2$, o trikampio ADF plotas lygus $\frac{1}{2}y^2$. Bet šių trikampių plotų suma ne mažesnė už stačiakampio $ABCD$ plotą, t. y. $\frac{x^2+y^2}{2} \geq xy$. Pažymėję $x^2 = a$, $y^2 = b$, gausime $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$.

Bet kuriems trims teigiamiems skaičiams a, b, c yra teisinga nelygybė $\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc}$.

Sakykime, stačiakampio gretasienio $ABCDA_1B_1C_1D_1$ briaunų ilgiai

$AB = x$,
$AD = y$,
$AA_1 = z$

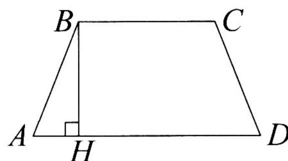


6 pav.

(6 pav.), o tiesės DR, DS ir DK yra kampų ADC, CDD_1 ir ADD_1 pusiaukampinės. Jei tiesės DS ir CC_1 kertasi taške P, tiesės DR ir CB – taške T, o tiesės PQ ir TQ lygiagrečios atitinkamai su tiesėmis CB ir CC_1, tai gauname keturkampę piramidę $CPQTD$, kurios pagrindo kraštinės $CT = CP = CD = x$, o aukštinės ilgis irgi lygus x. Taigi gautosios piramidės tūris lygus $\frac{x^3}{3}$. Analogiškai piramidės, kurios viršūnė D,

o briaunos yra tiesėse *DR*, *DK* ir *DA* tūris lygus $\frac{y^3}{3}$, o piramidės, kurios viršūnė *D*, o briaunos yra tiesėse *DK*, *DQ* ir DD_1 tūris lygus $\frac{z^3}{3}$. Kadangi šių trijų piramidžių tūrių suma ne mažesnė nei gretasienio tūris *xyz*, tai $\frac{x^3+y^3+z^3}{3} \geq xyz$. Pažymėję $a = x^3$, $b = y^3$, $c = z^3$, gausime, kad $\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc}$.

4 pavyzdys. Lygiašonės trapecijos ilgiausioji kraštinė lygi 13 cm, perimetras lygus 28 cm, o plotas 27 cm^2. Rasime kitų trapecijos kraštinių ilgius.



7 pav.

Sakykime, kad *AD* ir *BC* – trapecijos *ABCD* pagrindai, be to, $AD \geq BC$ (7 pav.). Jei trapecijos ilgiausios kraštinės yra šoninės kraštinės, t. y. $AB = CD = 13$, tai $AD + BC = 28 - 2 \cdot 13 = 2$. Tuomet trapecijos aukštinė $BH = \frac{2S}{AD+BC} = \frac{2 \cdot 27}{2} = 27$, taigi $BH > AB$, bet taip būti negali, nes *BH* – statmena tiesei *AD*, o *AB* – pasviroji. Taigi ilgiausioji kraštinė yra pagrindas *AD*. Jei $AB = CD = x$, tai

$$BC = 28 - 13 - 2x = 15 - 2x,$$

$$AH = \frac{1}{2}(AD - BC) = \frac{1}{2}(13 - (15 - 2x)) = x - 1,$$

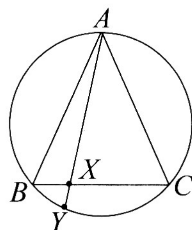
$$BH = \sqrt{AB^2 - AH^2} = \sqrt{x^2 - (x-1)^2} = \sqrt{2x-1}.$$

Tuomet pagal trapecijos ploto formulę $S = \frac{AD+BC}{2} \cdot BH$, t. y. $27 = \frac{13+15-2x}{2} \cdot \sqrt{2x-1}$ arba $(14-x)\sqrt{2x-1} = 27$. Šią lygtį spręsti keliant abi puses kvadratu yra gana sunku, todėl bandysime to išvengti taikydami aritmetinio ir geometrinio vidurkio nelygybę. Pastebime, kad

$$\frac{(14-x)+(14-x)+(2x-1)}{3} \geq \sqrt[3]{(14-x)^2(2x-1)},$$

t. y.

$$(14-x)^2(2x-1) \leq \left(\frac{27}{3}\right)^3 = 9^3.$$



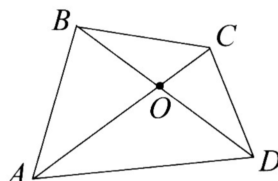
9 pav.

Tuomet

$$(14-x)\sqrt{2x-1} = \sqrt{(14-x)^2(2x-1)} \leq \sqrt{9^3} = 27,$$

o lygybė teisinga tik tada, kai $14-x=2x-1$, t. y., kai $x=5$. Taigi $AB=CD=BC=5$.

5 pavyzdys. Iškiliojo keturkampio $ABCD$ įstrižainės kertasi taške O, trikampių AOB ir COD plotai atitinkamai lygūs 4 ir 9. Nustatysime, kokią mažiausią reikšmę gali įgyti keturkampio $ABCD$ plotas.



8 pav.

Kadangi trikampių AOB ir BOC aukštinės, nubrėžtos iš viršūnės B, yra lygios, tai $S_{AOB}:S_{BOC}=AO:OC$. Bet ir $S_{AOD}:S_{DOC}=AO:OC$. Iš šių lygybių gauname, kad

$$S_{AOB}:S_{BOC}=S_{AOD}:S_{DOC},$$

arba

$$S_{AOB}\cdot S_{DOC}=S_{BOC}\cdot S_{AOD}.$$

Taigi $S_{BOC}\cdot S_{AOD}=4\cdot 9=36$. Pagal aritmetinio ir geometrinio vidurkių nelygybę gauname:

$$S_{BOC}+S_{AOD} \geq 2\sqrt{S_{BOC}\cdot S_{AOD}}=12,$$

o lygybė yra teisinga, kai $S_{BOC}=S_{AOD}$. Taigi mažiausias keturkampio plotas gaunamas, kai $S_{BOC}=S_{AOD}=6$, jis lygus $12+4+9=25$.

6 pavyzdys. Tiesė eina per trikampio ABC viršūnę A ir kerta kraštinę BC taške X, o apibrėžtą apie trikampį apskritimą taške Y (9 pav.). Įrodysime, kad $\frac{1}{AX}+\frac{1}{XY} \geq \frac{4}{BC}$.

Pagal aritmetinio ir geometrinio vidurkių nelygybę turime

$$\sqrt{AX\cdot XY} \leq \frac{AX+XY}{2} \qquad (1)$$

ir

$$\sqrt{BX \cdot XC} \le \frac{BX + XC}{2}.$$

Bet $BX + XC = BC$, o pagal apskritimo stygų savybę $BX \cdot XC = AX \cdot XY$. Todėl nelygybė $\sqrt{BX \cdot XC} \le \frac{BX + XC}{2}$ tampa tokia

$$\sqrt{AX \cdot XY} \le \frac{BC}{2}. \qquad (2)$$

Sudauginę (1) ir (2) nelygybes gauname

$$AX \cdot XY \le \frac{1}{4}(AX + XY) \cdot BC,$$

iš kur

$$\frac{4AX \cdot XY}{BC} \le AX + XY.$$

Padaliję abi šios nelygybės puses iš $AX \cdot XY$, gausime įrodomąją nelygybę.

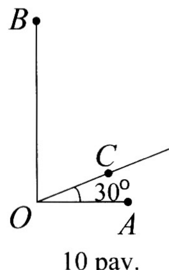
Baigdami pateiksime pavyzdį, kaip geometrinės nelygybės gali palengvinti algebros uždavinių sprendimą.

7 pavyzdys. Rasime reiškinio

$$\sqrt{x^2 - 2x + 4} + \sqrt{x^2 - \sqrt{3}\,x + 1}$$

mažiausią reikšmę.

Nubrėžkime statų kampą ir jo kraštinėse atidėkime atkarpas $OA = 1$, $OB = 2$ (10 pav.). Iš viršūnės O tarp kampo AOB kraštinių išvedame spindulį, sudarantį su kraštine OA 30° kampą, ir jame atidedame atkarpą $OC = x$. Pagal kosinusų teoremą trikampiams AOC ir BOC turime



10 pav.

$$AC = \sqrt{x^2 - x\sqrt{3} + 1}, \quad BC = \sqrt{x^2 - 2x + 4}.$$

Taigi

$$\sqrt{x^2 - x\sqrt{3} + 1} + \sqrt{x^2 - 2x + 4} = AC + CB.$$

Bet suma $AC + CB \geq AB$, o lygybė teisinga tik tada, kai taškas C yra atkarpoje AB. Tuomet minimali AB reikšmė – tai trikampio ABO įžambinė, lygi $\sqrt{5}$.

ANTROJI UŽDUOTIS

1. Lygiašonio trikampio viena kraštinė 5 cm ilgesnė už kitą, o jo perimetras lygus 20 cm. Apskaičiuokite trikampio kraštinių ilgius.

2. Trikampio ABC pusiaukraštinė AM yra trumpesnė už kraštinių AB ir AC sumos pusę. Įrodykite.

3. Trikampio dviejų aukštinių ilgiai yra 12 cm ir 20 cm. Ar gali trečioji aukštinė būti lygi 30 cm?

4. Stačiojo trikampio statinių ilgiai a ir b, įžambinės ilgis c. Kas daugiau: c^3 ar $a^3 + b^3$?

5. Iškiliojo keturkampio $ABCD$ kraštinėms ir įstrižainėms teisinga nelygybė $AB + BD \leq AC + CD$. Įrodykite, kad $AB < AC$.

6. Nėra tokio iškiliojo šešiakampio, kurio visos įstrižainės yra lygios. Įrodykite tai.

Nurodymas. Pasinaudokite 1 pavyzdyje įrodyta nelygybe.

7. Du apskritimai kertasi taškuose A ir B. Per tašką A išvesta tiesė l kerta vieną apskritimą dar ir taške C, o kitą – taške D. Atkarpa CD yra ilgiausia, jei tiesė l lygiagreti su apskritimų centrų tiese. Įrodykite.

8. Kokio didžiausio spindulio apskritimą galima įbrėžti į trikampį, kurio perimetras $2p$?

9. Jei a, b, c – trikampio kraštinės, o p – pusperimetris, tai teisinga nelygybė $2\sqrt{(p-b)(p-c)} \leq a$. Įrodykite.

10. Raskite reiškinio $\sqrt{1 + x^2 - x} + \sqrt{1 + x^2 - x\sqrt{3}}$ mažiausią reikšmę.

III. KRAŠTINIO ELEMENTO PRINCIPAS

Juozas Šinkūnas
(Vilniaus pedagoginis universitetas)

Kartais sprendžiant uždavinius naudinga atkreipti dėmesį į uždavinyje nagrinėjamus dydžius, įgyjančius ekstremalias reikšmes, pavyzdžiui, ilgiausią ar trumpiausią daugiakampio kraštinę, didžiausią ar mažiausią kampą, geriausią ar blogiausią variantą ir t. t. Tokie uždaviniai dažnai sprendžiami panaudojant nagrinėjamų dydžių ekstremalias savybes, sakoma – taikant kraštinio elemento principą. Kai kuriose šalyse, pavyzdžiui, Prancūzijoje šis principas vadinamas ekstremalaus elemento principu. Jo esmę išsiaiškinsime spręsdami pavyzdžius.

1 pavyzdys. Dėžėje yra 100 vienodų rutuliukų: 28 raudoni, 20 žalių, 12 geltonų, 20 mėlynų, 10 baltų ir 10 juodų. Kiek mažiausiai rutuliukų reikia atsitiktinai išimti iš dėžės, kad tarp jų būtų ne mažiau kaip 15 vienos spalvos rutuliukų.

Sprendimas. Nagrinėkime „blogiausią" variantą, t. y. iš dėžės traukiame 10 juodų, 10 baltų, 14 mėlynų, 12 geltonų, 14 žalių ir 14 raudonų rutuliukų. Tarp ištrauktų 74 rutuliukų nėra 15 vienos spalvos rutuliukų. Dabar kad ir kokį trauktume iš dėžės rutuliuką: raudoną, žalią ar mėlyną, jį pridėję prie ištrauktųjų gauname rinkinį, kuriame bus 15 vienos spalvos rutuliukų.

Ats.: 75 rutuliukai.

2 pavyzdys. Rasime lygties $8x^4+4y^4+2z^4-t^4=0$ sveikuosius sprendinius.

Sprendimas. Akivaizdu, kad $x=0$, $y=0$, $z=0$, $t=0$, t. y. (0, 0, 0, 0) yra šios lygties sprendinys. Įrodysime, kad daugiau sveikųjų sprendinių lygtis neturi. Tarkime priešingai. Sakykime (x, y, z, t) yra vienas iš sprendinių, skirtingų nuo $(0, 0, 0, 0)$ ir kurio $|x|+|y|+|z|+|t|$ suma yra mažiausia. Iš lygties pavidalo matyti, kad t yra lyginis. Todėl galima užrašyti: $t=2t_1$. Šią t išraišką įrašę į lygtį ir suprastinę iš 2 gauname:

$$4x^4+2y^4+z^4-8t_1^4=0.$$

Iš čia išplaukia, kad z taip pat yra lyginis skaičius, t. y. $z=2z_1$.

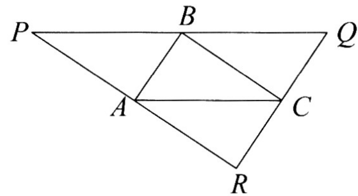
Analogiškai įrodoma, kad y ir x taip pat lyginiai, t. y. $x = 2x_1$, $y = 2y_1$. Nesunku įsitikinti, kad (x_1, y_1, z_1, t_1) taip pat yra duotosios lygties sprendinys ir

$$|x_1| + |y_1| + |z_1| + |t_1| = \left|\frac{x}{2}\right| + \left|\frac{y}{2}\right| + \left|\frac{z}{2}\right| + \left|\frac{t}{2}\right| < |x| + |y| + |z| + |t|.$$

Tai prieštarauja tam, kad $|x| + |y| + |z| + |t|$ yra mažiausia. Vadinasi, duotoji lygtis sveikųjų sprendinių, skirtingų nuo $(0, 0, 0, 0)$ neturi.

3 pavyzdys. Iš 2005 plokštumos taškų jokie 3 nėra vienoje tiesėje. Žinoma, kad bet kurio trikampio su tuose taškuose esančiomis viršūnėmis plotas neviršija 1 cm^2. Įrodysime, kad visus taškus galime uždengti vienu trikampiu, kurio plotas yra 4 cm^2.

Sprendimas. Nagrinėkime visus trikampius, kurių viršūnės yra duotieji taškai, ir išsirinkime tą trikampį, kurio plotas didžiausias. Sakykime, tai trikampis ABC. Per viršūnę A nubrėžkime tiesę l_1, lygiagrečią kraštinei BC; per viršūnę B – tiesę l_2, lygiagrečią kraštinei AC; per viršūnę C – tiesę, lygiagrečią kraštinei AB. Šios tiesės susikirsdamos sudaro trikampį PQR, kurio plotas $S_{PQR} = 4S_{ABC} \le 4$ cm^2. Įrodysime, kad visi 2005 taškai yra trikampyje PQR. Jeigu tartume, kad bent vienas taškas, pavyzdžiui, D, yra šalia trikampio PQR, tai tada trikampio, kurio viena viršūnė yra taške D, o kitos dvi taškuose A, B arba C, plotas būtų didesnis už S_{ABC}. Gavome prieštarą. Taigi trikampis PQR, kurio plotas neviršija 4 cm^2, uždengs visus 2005 taškus.



1 pav.

4 pavyzdys. 100 skaičių surašyta apskritimu. Įrodysime, kad visi skaičiai yra tarpusavyje lygūs, jeigu kiekvienas jų yra lygus savo kaimynų aritmetiniam vidurkiui.

Sprendimas. Iš šių skaičių išrinkime patį mažiausią. Sakykime, kad tai n_0. Sunumeruokime dabar šiuos skaičius pagal laikrodžio rodyklę n_0, n_1, n_2, ..., n_{99}. Skaičiaus n_0 kaimynai yra n_1 ir n_{99}. Turime, kad $n_1 \ge n_0$ ir $n_{99} \ge n_0$. Kadangi $n_1 + n_{99} = 2n_0$, tai gauname, kad

$n_1 = n_{99} = n_0$. Kadangi $n_2 \geq n_0$ ir $2n_1 = n_0 + n_2$, tai gauname, kad ir $n_2 = n_0$. Šį procesą tęsdami toliau, įrodysime, kad visi skaičiai yra tarpusavyje lygūs.

5 pavyzdys. Plokštumoje pažymėta keletas taškų, atstumai tarp bet kurių dviejų yra skirtingi. Kiekvienas taškas sujungiamas su jam artimiausiu tašku atkarpa. Ar taip jungiant taškus galima gauti uždarą daugiakampį, kurio viršūnės yra nebūtinai visi pažymėtieji taškai?

Sprendimas. Ne, negali. Tarkime priešingai, kad gauname daugiakampį $A_1A_2...A_n$. Sakykime, A_1A_2 yra ilgiausia jo kraštinė. Tokia kraštinė pagal sąlygą yra viena. Todėl $A_1A_2 > A_2A_3$ ir $A_1A_2 > A_1A_n$. Iš čia išplaukia, kad taškas A_2 nėra artimiausias taškui A_1 (A_n yra artimesnis taškui A_1) ir A_1 nėra artimiausias taškui A_2 (A_3 yra artimesnis taškui A_2). Taigi taškai A_1 ir A_2 negali būti sujungti atkarpa. Gavome prieštarą. Vadinasi, uždaro daugiakampio negalima gauti.

6 pavyzdys. Du tūkstančiai penki astronautai išvyko į kosmosą. Kiekvienas jų įsikūrė ant atskiro asteroido. Visi atstumai tarp bet kurių dviejų asteroidų yra skirtingi. Kiekvienas astronautas stebi jam artimiausią asteroidą. Įrodysime, kad yra vienas asteroidas, kurio niekas nestebi.

Sprendimas. Sakykime, *A* ir *B* yra asteroidai, atstumas tarp kurių yra mažiausias iš visų galimų atstumų tarp 2005 asteroidų. Astronautas, įsikūręs ant asteroido *A*, stebės asteroidą *B*, o astronautas, esantis ant asteroido *B*, stebės asteroidą *A*. Dabar imkime du asteroidus *C* ir *D* iš likusių 2003 asteroidų, atstumas tarp kurių yra mažiausias. Astronautas, esantis ant asteroido *C*, stebės asteroidą *D*, o astronautas, esantis ant asteroido *D*, stebės asteroidą *C*. Šį procesą tęsdami toliau, sugrupuosime visus asteroidus poromis. Tačiau asteroidų skaičius yra nelyginis. Taigi liks vienas asteroidas, kurio niekas nestebės.

7 pavyzdys. Vienoje šalyje yra 2005 oro uostai. Atstumai tarp bet kurių dviejų oro uostų yra skirtingi. Iš kiekvieno oro uosto pakyla lėktuvas ir skrenda į artimiausią oro uostą. Įrodysime, kad nė į vieną oro uostą negali atskristi daugiau kaip 5 lėktuvai.

Sprendimas. Jeigu iš oro uostų *A* ir *B* lėktuvas atskrido į oro uostą *O*, tai *AB* – trikampio *AOB* ilgiausia kraštinė. Todėl $\angle AOB > 60°$.

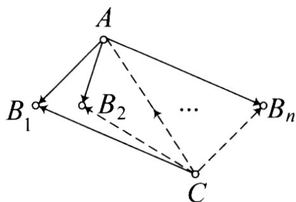
Sakykime, į oro uostą O atskrido lėktuvai iš oro uostų $A_1, A_2, ..., A_n$.

Tada vienas iš kampų $A_iOA_j \leq \frac{360^\circ}{n}$. Todėl $\frac{360^\circ}{n} > 60^\circ$, t. y. $n < 6$.

8 pavyzdys. Vienkryptijos šalyje visi miestai poromis sujungti plentais, kuriuose vienkryptis judėjimas. Ar šioje šalyje galima išrinkti vieną miestą – sostinę, iš kurio būtų galima nuvažiuoti į bet kurį šalies miestą, pravažiuojant daugiausia vieną miestą?

Sprendimas. Iš Vienkryptijos miestų išrinkime miestą, iš kurio išeina daugiausia kelių. Įsitikinsime, kad šis miestas (jį pažymėkime A) patenkina visus sostinės reikalavimus, ir iš jo išeina n kelių.

Tarkime, kad iš A negalima nuvykti į visus miestus. Yra miestas C, į kurį negalima nuvykti iš miesto A. Sakykime, į miestą $B_1, B_2, ..., B_n$ galima nuvykti tiesiogiai iš miesto A nepervažiuojant kito miesto. Visais keliais, kurie jungia C ir $A, B_1, B_2, ..., B_n$, vyksta judėjimas iš miesto C į minėtus miestus. Priešingu atveju į miestą C būtų galima patekti iš miesto A pervažiuojant vieną iš miestų B_i. Bet dabar yra $n+1$ kelias, išeinantis iš miesto C. Tai prieštarauja miesto A pasirinkimui. Vadinasi, iš miesto A galima patekti į bet kurį kitą šalies miestą.



2 pav.

TREČIOJI UŽDUOTIS

1. Vienoje kortelėje parašytas skaičius 1, dviejose kortelėse – skaičius 2, trijose kortelėse – skaičius 3, ... penkiasdešimtyje kortelių – skaičius 50. Visos kortelės sumaišomos. Kiek mažiausiai kortelių atsitiktinai reikia ištraukti, kad tarp jų būtų bent 10 kortelių su vienodais skaičiais?

2. Raskite lygties $x^3 - 3y^3 - 9z^3 = 0$ visus sveikuosius sprendinius.

3. Plokštumoje pažymėta 20 taškų, iš kurių jokie trys nėra vienoje tiesėje. Ar visada galima nubrėžti 10 atkarpų, kurios tarpusavyje nesikirstų ir jų galai būtų pažymėtieji taškai?

Nurodymas. Galima nubrėžti daug skirtingų 10 atkarpų, jungiančių 20 duotųjų taškų. Iš jų aibės išrinkite tas atkarpas, kurių ilgių suma mažiausia. Įrodykite, kad jos tarpusavyje nesikerta.

4. Trikampio pusiaukampinių ilgiai ne didesni už 1. Įrodykite, kad trikampio plotas ne didesnis už $\frac{1}{\sqrt{3}}$.

5. Keliautojas nutarė aplankyti savo šalies miestus. Šioje šalyje atstumai tarp bet kurių dviejų miestų yra skirtingi. Pirmąją dieną keliautojas iš savo gimtojo miesto A išvyksta į miestą B, kuris yra toliausiai nutolęs nuo A. Antrąją dieną jis vyksta į toliausiai nuo B nutolusį miestą C, skirtingą nuo miesto A. Trečiąją dieną jis išvyksta iš C į toliausiai nuo jo nutolusį miestą ir t. t. Ar taip keliaudamas keliautojas gali grįžti į miestą A?

6. Į 8×8 kvadrato langelius surašyti 64 skaičiai taip, kad kiekvienas skaičius yra ne didesnis už gretimų skaičių aritmetinį vidurkį. Įrodykite, kad visi skaičiai yra lygūs.

7. Ar egzistuoja iškilusis briaunainis, kurio kiekvienos sienos briaunų (kraštinių) skaičius būtų skirtingas?

8. Iškilojo keturkampio įstrižainės lygios 1 cm. Įrodykite, kad bent viena keturkampio kraštinė ne trumpesnė už $\frac{\sqrt{2}}{2}$ cm.

9. Ant stalo pažerta daug 2 ct, 5 ct ir 5 Lt monetų. Įrodykite, kad tarp jų galima rasti monetą, kuri liestų daugiausia 6 kitas monetas.

10. Plokštumoje pažymėti 2005 taškai taip, kad tarp bet kurių trijų taškų yra du taškai, atstumas tarp kurių mažesnis už 1. Įrodykite, kad mažiausiai 1003 pažymėti taškai yra vienetinio spindulio skritulyje.



IV. INDUKCIJOS PRINCIPAS

Antanas Apynis, Eugenijus Stankus
(Vilniaus universitetas)

Teiginius galima suskirstyti į dvi grupes – *bendruosius* ir *atskiruosius*. Pavyzdžiui, teiginiai A – „Bet kurio lygiagretainio įstrižainių susikirtimo taškas dalija kiekvieną įstrižainę į dvi lygias dalis“, ir B – „Visi skaičiai, kurių paskutinysis skaitmuo yra nulis, dalijasi iš 5“ yra bendrieji. Atskirųjų teiginių pavyzdžiai galėtų būti tokie: C – „Lygiagretainio, kurio dviejų kraštinių ilgiai yra 10 cm ir 13 cm, įstrižainių susikirtimo taškas dalija kiekvieną įstrižainę į dvi lygias dalis“, D – „Skaičius 210 dalijasi iš 5“. Aišku, kad iš teiginio A išplaukia teiginys C, iš teiginio B išplaukia teiginys D. Toks perėjimas nuo bendrojo teiginio prie atskirojo vadinamas *dedukcija.*

Mąstymo principas, kai nuo atskirojo teiginio pereinama prie bendrojo, vadinamas *indukcija.* Tačiau atkreipkime dėmesį, kad *vadovaujantis šiuo principu* galima gauti ir teisingą, ir neteisingą teiginį. Pavyzdžiui, iš teiginio D galima gauti teisingą teiginį A, tačiau iš teiginio D galima gauti ir neteisingą – pavyzdžiui, „Visi triženkliai skaičiai dalijasi iš 5“. Taip pat suklystume, jeigu iš teiginio B padarytume išvadą, kad keturkampio, kurio dviejų kraštinių ilgiai yra 10 cm ir 13 cm, įstrižainių susikirtimo taškas dalija kiekvieną įstrižainę į dvi lygias dalis.

Pateiksime dar kelis sudėtingesnius pavyzdžius.

1 pavyzdys. Nagrinėkime kvadratinio trinario $f(x)=x^2+x+5$ reikšmes, kai x yra sveikieji skaičiai.

Įrašę $x=0$, gausime pirminį skaičių 5. Skaičiai $f(1)=7$, $f(2)=11$ taip pat yra pirminiai. Galėtų kilti mintis, kad ir su didesniais skaičiais x gausime pirminius skaičius $f(x)$. Tačiau $f(4)=25$ yra sudėtinis skaičius. Taip pat sudėtinis yra ir skaičius $f(5)=35$.

2 pavyzdys. Ar tarp skaičių $991n^2+1$ $(n=1,2,3,\ ...)$ yra kurio nors natūraliojo skaičiaus kvadratas?

Turėtume gana ilgai tikrinti tokius skaičius iš eilės, nes pats mažiausias skaičius, su kuriuo $991n^2+1$ lygus kito skaičiaus kvadratui yra

$$n=12055735790331359447442538767.$$

Žinoma, šį faktą galėtume patikrinti tik kompiuteriu.

3 pavyzdys. Ar skaičiai $2^{2^n}+1$, $n=0,1,2,...$, yra pirminiai?

Įrašę $n=0,1,2,3,4$, gausime pirminius skaičius 3, 5, 17, 257, 65537. Galima spėti, kad visi tokie skaičiai yra pirminiai. Taip manė ir garsusis XVII amžiaus prancūzų matematikas P. Ferma (Pierre de Fermat, 1601–1665). Tačiau XVIII amžiuje kitas ne mažiau garsus šveicarų matematikas L. Oileris (Leonhard Euler, 1707–1783) nustatė, jog $2^{2^5}+1=4294967297=641\cdot 6700417$, kuris nėra pirminis skaičius.

4 pavyzdys. Nustatykime, į kelias dalis padalija erdvę n plokštumų, einančių per vieną tašką, jei jokios trys plokštumos nesikerta tiese.

Viena plokštuma dalija erdvę į 2 dalis. Dvi plokštumos, einančios per tašką, dalija erdvę į 4 dalis. Trys plokštumos, einančios per tašką, bet ne per bendrą tiesę, dalija erdvę į 8 dalis.

Iš pirmo žvilgsnio atrodo, kad padidėjus susikertančių plokštumų skaičiui vienetu, erdvės dalių skaičius padvigubėja. Tačiau tokia išvada būtų neteisinga, nes yra įrodyta, kad erdvės dalių skaičius išreiškiamas formule $n(n-1)+2$ (šio fakto įrodymą pateiksime toliau).

5 pavyzdys. Kokia galėtų būti sumos

$$S_n=\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+...+\frac{1}{(2n-1)\cdot(2n+1)}$$

formulė?

Skaičiuodami paeiliui, gauname:

$$S_1=\frac{1}{1\cdot 3}=\frac{1}{3}=\frac{1}{2\cdot 1+1},$$

$$S_2=\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}=\frac{2}{5}=\frac{2}{2\cdot 2+1},$$

$$S_3=\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}=\frac{3}{7}=\frac{3}{2\cdot 3+1},$$

$$S_4=\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+\frac{1}{7\cdot 9}=\frac{4}{9}=\frac{4}{2\cdot 4+1}.$$

Peršasi išvada, kad ir su visais natūraliaisiais n galioja formulė $S_n=\frac{n}{2n+1}$. Ji, kaip įsitikinsime toliau, yra teisinga.

Iš išnagrinėtų pavyzdžių matome, kad teiginys gali būti teisingas atskirais atvejais, tačiau gali negalioti visais galimais atvejais (pavyzdžiui, su visais natūraliaisiais skaičiais). Kaip nustatyti, ar teiginys teisingas bendruoju atveju, jeigu atskirais atvejais jis teisingas? Patikrinti visus atskirus atvejus, žinoma, neįmanoma. Išspręsti šią problemą kartais pavyksta tam tikra samprotavimų seka – vadinamuoju *matematinės indukcijos metodu.*

Šis metodas remiasi ***matematinės indukcijos principu***: *jeigu*

1) *teiginys teisingas su* $n = 1$;

2) *iš to, kad teiginys teisingas su* $n = k$, *išplaukia jog jis teisingas ir su* $n = k + 1$,

tuomet teiginys teisingas su bet kuriuo natūraliuoju skaičiumi n.

Matematinės indukcijos metodo taikymą pademonstruosime pavyzdžiais.

6 pavyzdys. Įrodysime, kad su visais natūraliaisiais skaičiais n teisinga formulė (žr. 5 pavyzdį)

$$S_n = \frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 5} + \frac{1}{5\cdot 7} + \ldots + \frac{1}{(2n-1)\cdot(2n+1)} = \frac{n}{2n+1}. \qquad (1)$$

Įrodymas. 1. Formulė yra teisinga su $n = 1$, t. y. $S_1 = \frac{1}{3}$.

2. Tarkime, kad formulė galioja su $n = k$, t. y.

$$S_k = \frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 5} + \frac{1}{5\cdot 7} + \ldots + \frac{1}{(2k-1)\cdot(2k+1)} = \frac{k}{2k+1};$$

čia k – bet kuris natūralusis skaičius. Įrodysime, kad tada $S_{k+1} = \frac{k+1}{2k+3}$.

Samprotaukime taip:

$$S_{k+1} = \frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 5} + \ldots + \frac{1}{(2k-1)\cdot(2k+1)} + \frac{1}{(2k+1)\cdot(2k+3)} =$$

$$= S_k + \frac{1}{(2k+1)(2k+3)} = \frac{k}{2k+1} + \frac{1}{(2k+1)(2k+3)} =$$

$$= \frac{2k^2+3k+1}{(2k+1)(2k+3)} = \frac{k(2k+1)+(2k+1)}{(2k+1)(2k+3)} = \frac{k+1}{2k+3}.$$

Remdamiesi matematinės indukcijos principu, galime teigti, kad (1) formulė teisinga su visais natūraliaisiais skaičiais n.

8 pavyzdys. Įrodykime, kad bet kurių trijų iš eilės einančių natūraliųjų skaičių kubų suma dalijasi iš 9.

Įrodymas. Sąlygoje kalbama apie sumą

$$L_n = n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3.$$

Patikrinkime, ar galioja abi matematinės indukcijos principo sąlygos.

1. Suma $L_1 = 1^3 + 2^3 + 3^3 = 36$ dalijasi iš 9.

2. Tarkime, kad suma $L_k = k^3 + (k+1)^3 + (k+2)^3$ dalijasi iš 9. Nagrinėdami sumos L_{k+1} dalumą iš 9, gauname:

$$L_{k+1} = (k+1)^3 + (k+2)^3 + (k+3)^3 =$$
$$= (k+1)^3 + (k+2)^3 + k^3 + 9k^2 + 27k + 27 =$$
$$= (k^3 + (k+1)^3 + (k+2)^3) + 9(k^2 + 3k + 3).$$

Kadangi abu dėmenys dalijasi iš 9, tai iš 9 dalijasi ir suma L_{k+1}.

Remdamiesi matematinės indukcijos principu, darome išvadą, kad teiginys teisingas su visais natūraliaisiais n.

9 pavyzdys. Plokštumoje per tašką M išvestos n nesutampančios tiesės. Įrodykime, kad jos dalija plokštumą į $2n$ dalių.

Įrodymas. 1. Viena tiesė dalija plokštumą į dvi dalis. Taigi teiginys teisingas su $n = 1$.

2. Tarkime, kad teiginys teisingas, kai per tašką M išvesta k tiesių, t.y. k tiesių plokštumą dalija į $2k$ dalių.

Raide T pažymėkime $(k+1)$-ąją tiesę, išvestą per tašką M. Tiesė T yra tarp dviejų iš ankstesniųjų k tiesių ir kryžminius kampus tarp jų dalija į dvi dalis. Vadinasi, prisideda dvi plokštumos dalys. Kadangi buvo $2k$ dalių, tai išvedus $(k+1)$-ąją tiesę T, bus $2k+2$ dalių.

Pagal matematinės indukcijos principą teiginys teisingas su visais natūraliaisiais skaičiais n.

10 pavyzdys. Yra nubrėžta n plokštumų, einančių per tašką M, taip kad jokios trys plokštumos nesikerta tiese. Įrodykime, kad šios plokštumos dalija erdvę į $A_n = n(n-1) + 2$ dalių.

Įrodymas. 1. Viena plokštuma erdvę dalija į dvi dalis. Vadinasi, teiginys teisingas su $n = 1$.

2. Tarkime, kad teiginys teisingas su $n = k$, t. y. k plokštumų, tenkinančių teiginio sąlygas, dalija erdvę į $k(k-1)+2$ dalių. Įrodysime, kad $k+1$ plokštumų dalija erdvę į $(k+1)k+2$ dalių.

Tarkime, kad P yra $(k+1)$-oji plokštuma. Ji su kiekviena iš pirmųjų k plokštumų susikerta tiese. Gauname k skirtingų tiesių, einančių per tašką M, kurios plokštumą P suskaido į $2k$ dalių.

Pirmosios k plokštumos dalija erdvę erdviniais daugiasieniais kampais. Kai kuriuos iš šių kampų plokštuma P dalija į dvi dalis. Dviejų tokių dalių bendroji siena yra plokštumos P kampas, apribotas dviem spinduliais, kuriais plokštuma P kertasi su daugiasienio kampo sienomis. Tokių kampų plokštumoje P yra $2k$. Vadinasi, ir daugiasienių kampų, dalijamų į dvi dalis, skaičius neviršija $2k$.

Kita vertus, plokštumos P kiekviena iš $2k$ dalių yra dviejų daugiasienių kampų bendroji siena. Vadinasi, tokių daugiasienių kampų yra ne mažiau kaip $2k$.

Darome išvadą, kad plokštuma P suskaldo į dvi dalis lygiai $2k$ daugiasienių kampų, sudarytų pirmosiomis k plokštumomis. Taigi, jei pirmosios k plokštumos suskaido erdvę į $k(k-1)+2$ dalių, tai $(k+1)$ plokštuma suskaido erdvę į $(k(k-1)+2)+2k = k(k+1)+2$ dalių.

Pagal matematinės indukcijos principą teiginys teisingas su visais natūraliaisiais skaičiais n.

Kartais nagrinėjamas teiginys negalioja nei su $n = 1$, nei su $n = 2$ ir t. t., nei su $n = m$ (m – kuris nors natūralusis skaičius), o galioja su $n = m+1$. Tuomet irgi sėkmingai taikomas matematinės indukcijos principas. Galima įrodyti, kad teiginys teisingas su natūraliaisiais skaičiais $n \geq m+1$.

11 pavyzdys. Nustatykime, su kuriais natūraliaisiais skaičiais n galioja nelygybė $2^n > n^2 + 1$.

Sprendimas. Pirmiausia atkreipkime dėmesį, kad nelygybė negalioja su $n = 1$ ($2^1 = 1^2 + 1$), taip pat ji negalioja su $n = 2$ ($2^2 < 2^2 + 1$), su $n = 3$ ($2^3 < 3^2 + 1$) ir su $n = 4$ ($2^4 < 4^2 + 1$). Kai $n = 5$, gauname

$2^5 > 5^2 + 1$. Matematinės indukcijos metodu bandykime įrodyti, kad nelygybė $2^n > n^2 + 1$ galioja su visais natūraliaisiais $n \geq 5$.

1. Nelygybė $2^n > n^2 + 1$ galioja su $n = 5$.

2. Tarkime, kad ši nelygybė galioja su $n = k$, $k \geq 5$, t. y. $2^k > k^2 + 1$. Įrodysime, kad tada galioja nelygybė $2^{k+1} > (k+1)^2 + 1$.

Kadangi su $k > 2$ teisinga nelygybė $2^k > 2k + 1$ (įrodykite savarankiškai), tai sudėję nelygybes $2^k > k^2 + 1$ ir $2^k > 2k + 1$ panariui, turėsime: $2^{k+1} > k^2 + 1 + 2k + 1 \Rightarrow 2^{k+1} > (k+1)^2 + 1$.

Pagal matematinės indukcijos principą teiginys teisingas su visais natūraliaisiais $n \geq 5$.

Ats.: $n \geq 5$.

Lietuvos jaunųjų matematikų mokyklos programose matematinė indukcija nagrinėjama jau nebe pirmą kartą. Apie indukcijos principą galima paskaityti LJMM leidžiamose knygelėse "Jaunajam matematikui" (žr. 1 knygelės 32-37 psl. ir 2 knygelės 50-56 psl.).

KETVIRTOJI UŽDUOTIS

1. Įrodykite, kad su visais natūraliaisiais n

$$1^2 + 3^2 + 5^2 + \ldots + (2n-1)^2 = \frac{n(2n-1)(2n+1)}{3}.$$

2. Apskaičiuokite sumą

$$\frac{1}{1 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 9} + \frac{1}{9 \cdot 13} + \ldots + \frac{1}{(4n-3) \cdot (4n+1)}$$

ir įrodykite, kad formulė galioja su visais natūraliaisiais skaičiais n.

3. Įrodykite, kad su visais natūraliaisiais n skaičius $14n^3 + 9n^2 + n$ dalijasi iš 6.

4. Įrodykite, kad su visais natūraliaisiais n skaičius $11^{n+1} + 12^{2n-1}$ dalijasi iš 133.

5. Įrodykite, kad su visais natūraliaisiais n skaičius $\frac{n}{3}+\frac{n^2}{2}+\frac{n^3}{6}$ yra natūralusis.

6. Nustatykite, su kuriais natūraliaisiais skaičiais n galioja nelygybė $2^n > 4n+5$.

7. Įrodykite, kad su visais natūraliaisiais n galioja nelygybė $(1-a)^n < \frac{1}{1+na}$, kai $0<a<1$.

8. Įrodykite, kad su visais natūraliaisiais n galioja nelygybė

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\ldots\cdot\frac{2n-1}{2n}\le\frac{1}{\sqrt{3n+1}}.$$

9. Įrodykite, kad su visais natūraliaisiais n galioja nelygybė

$$\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\ldots+\frac{1}{n!}\le\frac{2n-1}{n}.$$

10. Įrodykite, kad su bet kuriuo dėmenų skaičiumi n galioja nelygybė

$$|a_1+a_2+\ldots+a_n|\le|a_1|+|a_2|+\ldots+|a_n|$$

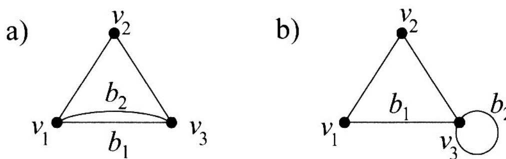
(a_i – realieji skaičiai, $i=1,2,\ldots,n$).



V. GRAFAI, OILERIO FORMULĖ

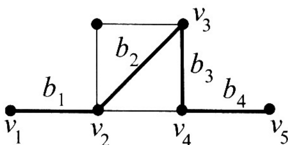
Livija Maliaukienė ir Juozas Šinkūnas
(Vilniaus pedagoginis universitetas)

Gabenant prekes, laiškus, nustatant saugos tarnybų maršrutus ir pan. dažnai tenka rasti optimalų maršrutą. Pažymėję objektus taškais, o galimus maršrutus – atkarpomis, jungiančiomis šiuos taškus, gausime figūrą, sudarytą iš taškų, vadinamų *viršūnėmis,* ir atkarpų, vadinamų *briaunomis.* Tokia figūra vadinama *grafu* [žr. 1]. Pastebėsime, kad dvi viršūnes gali jungti ir daugiau negu viena briauna (žr. 1 pav. a), arba briauna gali jungti viršūnę su ja pačia, šiuo atveju turime *kilpą* (žr. 1 pav. b).



1 pav.

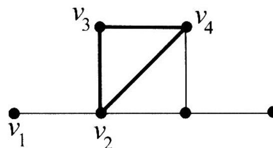
Maršrutu (keliu) grafe G vadinama viena po kitos einančių viršūnių v_i ir briaunų b_j seka $v_1, b_1, v_2, b_2, ..., b_{n-1}, v_n$, kuri prasideda ir baigiasi viršūne, o kiekviena briauna b_i $(1 \le i \le n-1)$ jungia viršūnes, tarp kurių ji užrašyta (žr. 2 pav. a). Kelias, kurio pradžia sutampa su pabaiga, t. y. $v_1 = v_n$, vadinamas *ciklu* (žr. 2 pav. b). Jei bet kurias dvi viršūnes jungia tik viena briauna, tai maršrutui užrašyti pakanka tik viršūnių sekos.



a) maršrutai

$v_1, b_1, v_2, b_2, v_3, b_3, v_4, b_4, v_5$

ir v_1, v_2, v_3, v_4, v_5



b) ciklas v_2, v_3, v_4, v_5

2 pav.

Grafas vadinamas *jungiuoju grafu,* jei bet kurias dvi jo viršūnes galima sujungti keliu. Jei taip nėra, t. y. grafas sudarytas iš kelių atskirų dalių, tai sakoma, kad grafas sudarytas iš kelių *komponenčių* (žr. 3 pav.).



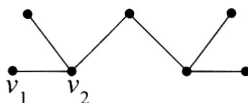
a) jungusis grafas



b) grafas, sudarytas iš 3 komponenčių

3 pav.

Jungusis grafas, neturintis ciklų, yra vadinamas *medžiu* (4 pav.).



4 pav.

Grafo viršūnės v *laipsniu* (žymimas deg v) yra vadinamas iš šios viršūnės išeinančių briaunų skaičius. Pavyzdžiui, 4 pav. pavaizduoto grafo viršūnės v_1 laipsnis yra 1, o deg $v_2 = 3$.

1 pavyzdys. Turistijos šalies miestus jungia toks kelių tinklas, kad tarp bet kurių dviejų miestų yra vienintelis maršrutas. Įrodysime, kad šioje šalyje yra bent vienas miestas, iš kurio išeina tik vienas kelias.

Sprendimas. Pabandysime pakeliauti po Turistiją. Pradėję kelionę mieste M_1, iš jo vyksime į M_2 ir t. t. Kiekvieną kartą atvykę į miestą M_{k-1} iš jo išvyksime į kitą miestą M_k, t. y. kitu keliu. Į jokį jau aplankytą miestą M_1, M_2, ..., M_k neįmanoma sugrįžti, nes pagal sąlygą bet kuriuos du miestus jungia tik vienas maršrutas. Kadangi miestų, taigi ir maršrutų, skaičius yra baigtinis, tai tam tikru momentu ateisime į dar neaplankytą miestą M_n, iš kurio nėra maršruto į jokį kitą miestą M_j, $i = 1, 2, ..., n-1$ (priešingu atveju tai būtų jau antrasis maršrutas, jungiantis M_n su M_j).

Šiame pavyzdyje kelių tinklas yra medis. Kiekviename medyje yra bent viena viršūnė, kurios laipsnis yra 1; ši viršūnė yra vadinama *galine viršūne.*

2 pavyzdys. Alfos saloje yra 999 miestai. Kiekvienas miestas sujungtas su kitu miestu vieninteliu maršrutu. Rasime, kiek šioje saloje yra kelių, jungiančių du miestus ir neinančių per jokį kitą miestą.

Sprendimas. Jei miestą pažymėtume tašku, o kelią tarp dviejų miestų, kuris neina per jokį kitą miestą, – atkarpa, jungiančia šiuos taškus, tai gautume medį. Mūsų tikslas – suskaičiuoti šio medžio (su 999 viršūnėmis) briaunas. Medis turi bent vieną galinę viršūnę, t. y. tokią viršūnę, iš kurios išeina tik viena briauna. Išbraukime šią viršūnę ir briauną. Likęs grafas yra medis, todėl jis turi turėti bent vieną galinę viršūnę. Išbraukime ją ir iš jos išeinančią briauną. Pakartojus tai 998 kartus, liks grafas, sudarytas iš vienintelės viršūnės ir be briaunų, nes neliko jokio kito miesto, todėl ir jokio kelio. Vadinasi, pradinis grafas turi 998 briaunas; taigi ieškomasis kelių skaičius yra 998.

Galima suformuluoti ir bendresnį teiginį:

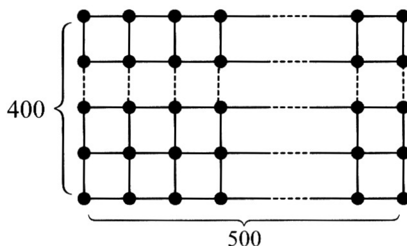
1 teorema. Jungusis grafas G, turintis V viršūnių ir B briaunų, yra medis tada ir tik tada, kai

1) jis neturi ciklų,
2) $V=B+1$.

2 pavyzdyje $V = 999$, todėl $B = V - 1 = 998$.

3 pavyzdys. Žvejybos tinklas yra stačiakampio formos ir turi 400×500 akių. Rasime, koks didžiausias tinklo virvučių skaičius gali nutrūkti, kad tinklas nesuplyštų į atskirus gabalus.

Sprendimas. Tinklą galime laikyti grafu, kurio viršūnės yra tinklo mazgai, o briaunos – mazgus jungiančios virvutės.

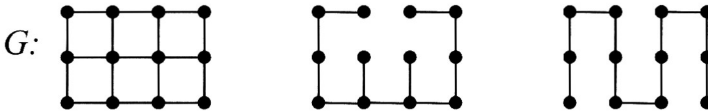


5 pav.

Mūsų tikslas – rasti kiek daugiausia galima pašalinti briaunų, kad grafas liktų jungusis. Atkreipkime dėmesį, kad iš grafui priklausančio ciklo pašalinus vieną briauną, grafas lieka jungusis, bet neturi šio ciklo.

Taigi pašalinę po vieną kiekvieno ciklo briauną, gausime jungųjį grafą, neturintį ciklų, o toks grafas yra medis. Iš medžio jau nebegalime pašalinti nė vienos briaunos, nes gautume nejungųjį grafą. Raskime gautojo medžio briaunų skaičių. Tinklo, taip pat ir gautojo medžio, viršūnių skaičius lygus $V = 401 \cdot 501 = 200901$. Gautojo medžio briaunų skaičius $B = V - 1 = 200901 - 1 = 200900$. Pradiniame grafe buvo $400 \cdot 501 + 401 \cdot 500 = 200400 + 200500 = 400900$ briaunų, todėl pašalinti galima $400900 - 200900 = 200000$ briaunų.

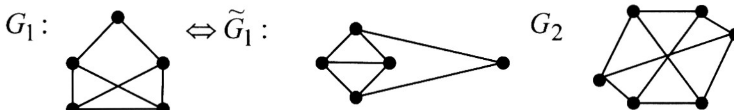
Spręsdami šį uždavinį, suradome „maksimalųjį" medį, turintį visas duotojo grafo G viršūnes. Atkreipkime dėmesį, kad toks „maksimalusis" medis nėra vienintelis (6 pav. pavaizduotas grafas ir du jo „maksimalieji" medžiai).



6 pav.

Du grafai yra vadinami *izomorfiniais,* jeigu jie turi vienodą viršūnių skaičių ir kiekvieną vieno grafo dvi viršūnes jungiančią briauną atitinka kito grafo atitinkamas viršūnes jungianti briauna.

Grafas G yra vadinamas *plokščiuoju grafu,* jeigu egzistuoja jam izomorfinis grafas, kurio visos viršūnės yra vienoje plokštumoje, o briaunos neturi bendrų taškų, išskyrus viršūnes. Pavyzdžiui, grafas G_1 (žr.7 pav.) yra plokščiasis, nes izomorfinis grafui $\widetilde{G}_1$. Grafas G_2 nėra plokščiasis.

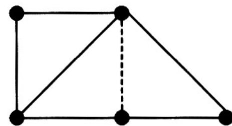


7 pav.

Akivaizdu, kad medis yra plokščiasis grafas. Atkreipkime dėmesį, kad plokščiasis grafas plokštumą dalija į sritis.

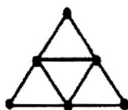
2 teorema. Tegu S – plokščiojo jungaus grafo G suformuotų sričių plokštumoje skaičius, V – grafo G viršūnių, o B – briaunų skaičius. Tuomet galioja *Oilerio formulė* $S - B + V = 2$.

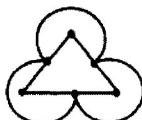
Įrodymas. Kiekvienos grafo G suformuotos srities kontūras yra ciklas. Kaip ir 3 pavyzdyje, iš kiekvieno grafo G ciklo išmeskime po vieną briauną tol, kol grafas lieka jungusis. Atkreipkime dėmesį, kad kiekvieną kartą sričių skaičius sumažėja vienetu, o viršūnių skaičius lieka tas pats (žr. 8 pav.). Galiausiai gausime medį, kuriam $S = 1$. Pagal 1 teoremą $V = B + 1$, todėl $V - B + S = 2$. Akivaizdu, kad šalinant briaunas dydis $S - B + V$ nekinta. Taigi lygybė $S - B + V = 2$ galioja ir pradiniam grafui.



8 pav.

Pastaba. Plokščiąjį grafą galima nubraižyti įvairiai, ir atrodytų, kad jo ribojamų sričių skaičius turėtų skirtis, tačiau taip nėra. Duotajame grafe dydžiai V *ir* B yra žinomi; tuomet S galima apskaičiuoti iš Oilerio formulės. Skaičius S nepriklauso nuo grafo pavaizdavimo būdo. 9 pav. yra pavaizduoti du plokštieji izomorfiniai grafai, turintys po 6 viršūnes ir 9 briaunas. Abu grafai dalija plokštumai $S = 2 + B - V = 2 + 9 - 6 = 5$ sritis.





9 pav.

Atkreipiame dėmesį, kad nejungiam grafui Oilerio formulė negalioja.

4 pavyzdys. Ežeringame krašte yra 8 ežerai, sujungti 12 tarpusavyje nesikertančių kanalų taip, kad iš kiekvieno ežero galima nuplaukti į bet kurį kitą. Apskaičiuosime kanalais bei ežerais apribotų sausumos dalių skaičių.

Sprendimas. Sudarykime grafą, kuriame ežeras yra viršūnė, o kanalas – briauna. Kadangi kanalai tarpusavyje nesikerta, tai šis grafas tikrai plokščiasis ir jungusis; $V = 8$, $B = 12$. Kadangi $V \neq B + 1$, tai grafas nėra medis (pagal 1 teoremą). Todėl egzistuoja sausumos dalys (salos), apribotos ežerais ir kanalais. Pagal Oilerio formulę

$$S = 2 + B - V = 2 + 12 - 8 = 6;$$

todėl salų skaičius yra $S - 1 = 5$.

Pastaba. Žinodami salų ir ežerų skaičių, pagal Oilerio formulę galėtume rasti kanalų, reikalingų sklandžiai laivybai, skaičių.

Plokščiuosius grafus galima braižyti ne tik plokštumoje, bet ir ant sferos.

5 pavyzdys. Kvadrato viduje yra 20 taškų, kurie tarpusavyje bei su kvadrato viršūnėmis sujungti atkarpomis taip, kad kvadratas yra padalytas į trikampius, o atkarpos kertasi tik minėtuose 24 taškuose. Apskaičiuosime gautų trikampių skaičių.

Sprendimas. Pagal uždavinio sąlygą turime jungųjį plokščiąjį grafą su 24 viršūnėmis. Jo briaunos – nubrėžtosios atkarpos ir 4 kvadrato kraštinės. Šis grafas dalija plokštumą į sritis, kurios visos yra trikampiai, išskyrus kvadrato išorę. Suskaičiuosime šio grafo briaunas. Kadangi kiekviena briauna atskiria dvi sritis, tai $3 \cdot (S-1) + 4 = B \cdot 2$. Apskaičiavę B ir įrašę į Oilerio formulę, gauname $2 = S - B + V = S - \dfrac{3(S-1)+4}{2} + 24$. Iš čia $S = 43$; taigi trikampių skaičius yra $S - 1 = 42$.

3 teorema. Tegu G – plokščiasis grafas, turintis V viršūnių ir B briaunų. Jeigu kiekvienos srities kontūras yra ciklas, turintis n briaunų, tai $B = \dfrac{n(V-2)}{n-2}$.

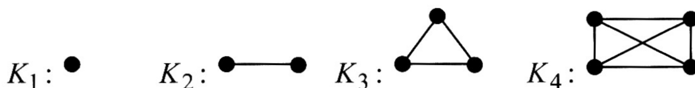
Įrodymas. Kadangi kiekvienos grafo G srities kontūras yra n-briaunis ciklas ir kiekviena briauna priklauso dviems sritims, tai $n \cdot S = 2 \cdot B$. Įrašę S reikšmę į Oilerio formulę, gauname: $\dfrac{2B}{n} - B + V = 2$; taigi $B = \dfrac{n(V-2)}{n-2}$.

4 teorema. Jungiajam plokščiajam grafui G, turinčiam V viršūnių ir $B \geq 2$ briaunų, galioja nelygybė $B \leq 3V - 6$.

Įrodymas. Jei grafas G turi tik dvi briaunas, tai jis plokštumos į sritis nepadalija, ir $S = 1$. Šiuo atveju nelygybė $2B \geq 3S$ galioja.

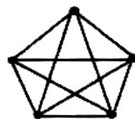
Tarkime, kad grafas G turi daugiau negu dvi briaunas; tuomet jis plokštumą padalija į S sričių. Apskaičiuokime briaunų, ribojančių šias sritis, skaičių α. Kiekviena sritis apribota mažiausiai 3 briaunomis, todėl $\alpha \geq 3S$. Kita vertus, kiekviena briauna skiria daugiausia dvi sritis, todėl $2B \geq \alpha$. Taigi ir šiuo atveju $2B \geq 3S$, todėl $S \leq 2B/3$. Pagal Oilerio formulę $2 = S - B + V \leq 2B/3 - B + V$, o iš čia $B \leq 3V - 6$.

Grafas, turintis n viršūnių, kurio kiekviena viršūnė sujungta su kiekviena kita viršūne, vadinamas *pilnuoju grafu* ir žymimas K_n. Pavyzdžiui, grafai K_1, K_2, K_3 ir K_4 yra pilnieji.



6 pavyzdys. Įrodysime, kad pilnasis grafas su 5 viršūnėmis nėra plokščiasis.

Sprendimas. Pilnasis grafas K_5 su 5 viršūnėmis yra pavaizduotas 10 pav. Kadangi $V = 5$, o $B = 10$, tai $B = 10 > 3 \cdot 5 - 6$.. Ši nelygybė prieštarauja 4 teoremai. Taigi grafas K_5 nėra plokščiasis.



10 pav.

Išvada. Pilnieji grafai K_n, $n \geq 5$, nėra plokštieji.

7 pavyzdys. Šalyje yra 15 miestų, kurie tarpusavyje sujungti arba autostrada, arba geležinkeliu; be to, nėra sankryžų. Įrodysime, kad yra bent vienas viadukas automobiliams važiuoti virš autostrados arba bent vienas traukinių tiltas virš geležinkelio.

Sprendimas. Šalies transporto grafe galima išskirti du grafus: autostradų grafą ir geležinkelių grafą, turinčius po 15 viršūnių (šie grafai nebūtinai jungūs). Bendras abiejų grafų briaunų skaičius yra $15 \cdot 14 / 2 = 105$, todėl nors vienas iš šių grafų turi 53 briaunas. Tačiau grafas, turintis 15 viršūnių ir 53 briaunas nėra plokščiasis grafas (nes $B = 63 > 3 \cdot 15 - 6$, o tai prieštarauja 4 teoremai).

PENKTOJI UŽDUOTIS

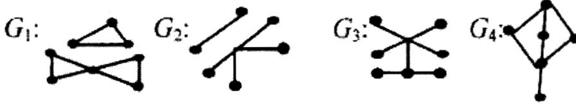
1. Šalia trijų gyvenamųjų namų yra kūdra ir šulinys. Iš kiekvieno namo gyventojai išmynė nesikertančius takelius prie šulinio ir kūdros. Nubrėžkite grafą.

2. Interneto kavinės savininkas turi sujungti kabeliais 12 kompiuterių taip, kad nesusidarytų ciklas.

2. 1. Kiek kabelių reikės panaudoti?

2. 2. Ar jam tai pavyktų padaryti su mažesniu kabelių skaičiumi (nenutraukiant ryšio tarp kompiuterių)?

3. Nurodykite, kurie pavaizduoti grafai yra:
a) jungūs; b) nejungūs; c) medžiai; d) turi ciklą.



4. Botanikos sode yra 23 ypatingi gėlynai, kuriuos paporiui jungia takeliai. Sodo vadovybė nusprendė takelius išgrįsti trinkelėmis. Kiek daugiausia takelių galima uždaryti remontui, kad liktų galimybė iš bet kurio gėlyno patekti į bet kurį kitą gėlyną (galbūt praeinant kitus gėlynus).

5. Keturi kaimynai turi keturis šulinius. Ar gali kiekvienas kaimynas išminti po vieną takelį prie kiekvieno šulinio taip, kad šie takeliai nesikirstų?

6. Briaunainio sienos yra lygūs lygiakraščiai trikampiai. Kiekvienos viršūnės v_i, laipsnis deg $v_i = 5$. Remdamiesi Oilerio formule apskaičiuokite briaunainio sienų, briaunų ir viršūnių skaičių.

7. Trikampio *ABC* viduje yra pažymėta 10 taškų, kurie tarpusavyje bei su trikampio viršūnėmis sujungti atkarpomis taip, kad trikampis *ABC* yra padalytas į trikampius, o atkarpos kertasi tik minėtuose 13 taškų. Į kiek trikampių yra padalytas trikampis *ABC*?

8. Vaizdingame krašte yra 15 ežerų, kuriuos nuspręsta sujungti nesikertančiais kanalais taip, kad susidarytų 7 salos, o iš kiekvieno ežero galima būtų nuplaukti į bet kurį kitą. Kiek kanalų reikia iškasti?

9. „Darbščiųjų rankų" būrelio nariai nutarė ant stalo iš degtukų sudėlioti bičių korio maketą, kurio kiekviena akutė yra taisyklingasis šešiakampis, o kraštinė – vienas degtukas. Degtukų bendri taškai tik šešiakampių viršūnės, kurių iš viso yra 150. Kiek degtukų reikės maketui?

10. Omegos planetoje keliai nesikerta ir joje nėra nė vieno tilto. Įrodykite, kad šioje planetoje yra miestas, iš kurio išeina daugiausia penki keliai.

Literatūra

1. L. Maliaukienė, J. Šinkūnas. Grafai. „Jaunajam matematikui 1", Vilnius, 2001, p. 76-86, 122–125
2. L. Maliaukienė. Grafų teorijos įžanga . „Alfa plius omega", Nr. 1, TEV, Vilnius, 2000, p. 28–35.
3. P. Tannenbaum, R. Arnold. „Kelionės į šiuolaikinę matematiką", TEV, Vilnius, 1995.



VI. TAŠKŲ GEOMETRINĖS VIETOS

Jadvyga Vainavičienė
(Vilniaus pedagoginis universitetas)

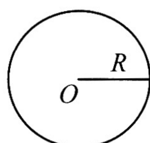
Plokštumos geometrine figūra vadinama bet kokia plokštumos taškų aibė. Dažnai figūra apibrėžiama savybe, kurią turi tenkinti visi tos figūros taškai ir tik jie. Tokia figūra vadinama taškų, turinčių duotą savybę, geometrine vieta. Įrodymui, kad figūra F yra visų taškų, turinčių nurodytą savybę aibė, reikia patikrinti du teiginius:

1) kiekvienas figūros F taškas pasižymi minėta savybe;

2) kiekvienas taškas, tenkinantis tą savybę, yra figūros F taškas.

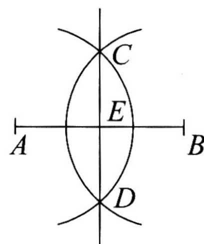
Dažnai antrasis teiginys pakeičiamas jam ekvivalenčiu teiginiu: kiekvienas taškas, nepriklausantis figūrai F, nepasižymi nurodyta savybe.

Per matematikos pamokas jūs susipažinote su kai kuriomis taškų geometrinėmis vietomis.



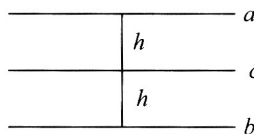
1 pav.

I. Aibė plokštumos taškų, duotuoju atstumu R nutolusių nuo pasirinktojo taško O, yra apskritimas, kurio centras – taškas O, o spindulys R (1 pav.). Sutrumpintai tokį apskritimą žymėsime (O, R).



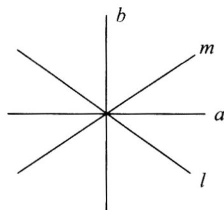
2 pav.

II. Aibė plokštumos taškų, vienodai nutolusių nuo pasirinktųjų dviejų taškų A ir B yra atkarpos AB vidurio statmuo CD $(AE = EB)$ (2 pav.).

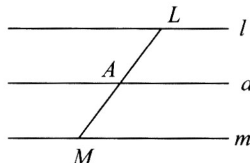


3 pav.

III. Aibė plokštumos taškų, nutolusių nuo duotosios tiesės c atstumu h, yra dvi tiesės a ir b, lygiagrečios su tiese c (3 pav.).



4 pav.



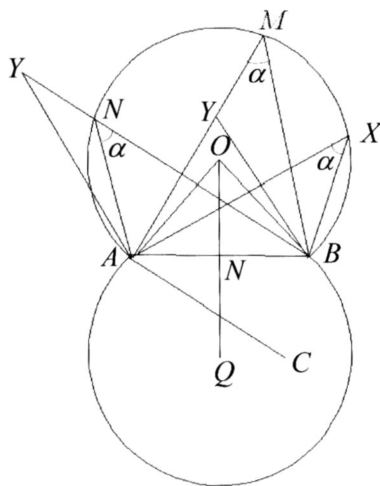
5 pav.

IV. Aibė plokštumos taškų, vienodai nutolusių nuo dviejų susikertančių tiesių l ir m, yra dvi tiesės a ir b, kuriose yra tiesių l ir m sudaromų kampų pusiaukampinės (4 pav.).

V. Aibė plokštumos taškų, vienodai nutolusių nuo dviejų lygiagrečių tiesių l ir m, yra tiesė a, lygiagreti su jomis ir dalijanti atkarpą LM pusiau, t. y. $LA = AM$ ($L \in l$, $M \in m$, $A \in a$) (5 pav.).

Susipažinsime su keliomis sudėtingesnėmis geometrinėmis vietomis.

1 pavyzdys. Sakoma, kad iš taško M atkarpa AB matoma kampu α, jei $\angle AMB = \alpha$. Aibė taškų, iš kurių atkarpa AB matoma kampu α, yra du apskritimo lankai, simetriški tiesės AB atžvilgiu (6 pav.). Jei $\angle AMB = \alpha$, tai bet kuriam apskritimo, einančio per taškus A, M ir B lanko AMB taškui X yra teisinga lygybė $\angle AXB = \angle AMB = \alpha$; tą pačią savybę turi lanko, simetriško lankui AMB tiesės AB atžvilgiu, taškai. Jei taškas Y nėra nurodytuose lankuose, tai pagal trikampio priekampio savybę turime $\angle AYB < \alpha$ (jei taškas Y yra 6 pav. pavaizduotos figūros išorėje) ir $\angle AYB > \alpha$ (kai taškas Y yra pavaizduotos figūros viduje). Tokiu būdu abiem atvejais $\angle AYB \neq \alpha$.

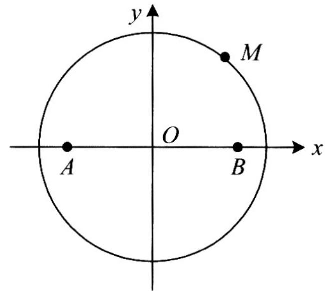


6 pav.

Jei taškas O yra apskritimo, einančio per taškus A, M, B centras, tai O yra atkarpos AB vidurio statmenyje OQ. Kadangi $\angle AOB = 2\alpha$, tai $\angle AOQ = \alpha$. Jei nubrėšime $AC \perp AO$, tai $\angle CAB = \alpha$. Iš čia matome, kad norint nubrėžti šią geometrinę vietą, reikia nubrėžti $\angle BAC = \alpha$, iš taško A iškelti tiesei AC statmenį ir atkarpos AB vidurio statmenį NQ. Tada apskritimo centras O yra to statmens ir atkarpos AB vidurio statmens NQ sankirta.

Nagrinėjant taškų geometrines vietas dažnai gelbsti koordinačių metodas.

2 pavyzdys. Rasime taškų, kurių atstumų iki duotųjų taškų A ir B kvadratų suma pastovi (pažymėkime ją b^2), aibę F.



7 pav.

Pasirinkime koordinačių sistemą Oxy taip, kad Ox ašis sutaptų su tiese AB, o koordinačių pradžios taškas būtų atkarpos AB vidurio taškas (7 pav.). Jei atkarpos AB ilgį pažymėsime $2a$, tai $A(-a; 0)$, $B(a; 0)$. Taškas $M(x; y)$ yra ieškomojoje taškų aibėje F, jei $AM^2 + BM^2 = b^2$. Kadangi

$$AM^2 = (x+a)^2 + y^2,$$

$$BM^2 = (x-a)^2 + y^2,$$

tai

$$(x+a)^2 + y^2 + (x-a)^2 + y^2 = b^2.$$

Iš čia gauname, kad $x^2 + y^2 = \frac{b^2}{2} - a^2$ $\left(\frac{b^2}{2} - a^2 \geq 0\right)$. Gavome apskritimo, kurio centras koordinačių pradžioje, o spindulio ilgis $R = \sqrt{\frac{b^2}{2} - a^2}$, lygtį.

Įrodysime atvirkščią teiginį: jei taško $M(x; y)$ koordinatės tenkina gautąją lygtį, tai yra teisinga lygybė $AM^2 + BM^2 = b^2$, t. y., $M \in F$. Iš tikrųjų

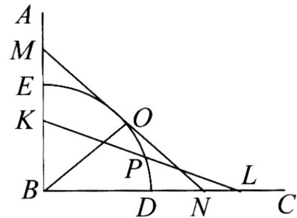
$$AM^2 + BM^2 = (x+a)^2 + y^2 + (x-a)^2 + y^2 =$$

$$= 2x^2 + 2y^2 + 2a^2 = 2x^2 + 2\left(\frac{b^2}{2} - a^2 - x^2\right) + 2a^2 = b^2.$$

Taigi uždavinio sąlygą tenkinanti geometrinė vieta yra apskritimas, kurio centras yra atkarpos AB vidurio taškas, o spindulys lygus $\sqrt{\frac{b^2}{2} - a^2}$.

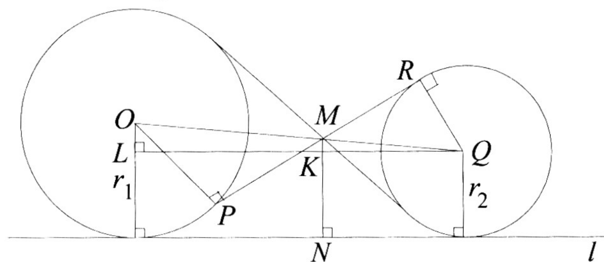
3 pavyzdys. Pastovaus ilgio atkarpa a juda plokštumoje taip, kad jos galai yra stačiojo kampo ABC kraštinėse. Surasime, kokią geometrinę vietą taškų nubrėžia šios atkarpos vidurio taškas.

Sakykime, kad atkarpos MN galai yra stačiojo kampo kraštinėse (8 pav.). Stačiojo kampo viršūnė B yra apskritime, kurio skersmuo MN. Atkarpa OB yra šio apskritimo spindulys, todėl $OB = \frac{1}{2}MN = \frac{1}{2}a$. Todėl atkarpos MN vidurio taškas nutolęs nuo stačiojo kampo viršūnės pastoviu atstumu, lygiu $\frac{1}{2}a$. Taigi ieškomoji taškų aibė yra apskritimo su centru taške B ir spinduliu $\frac{a}{2}$ lankas ED, esantis kampo ABC viduje. Teisingas ir atvirkštinis teiginys.



8 pav.

Jei taškas P yra apskritime $\left(B; \frac{a}{2}\right)$, tai jo atstumas iki taško B lygus $\frac{a}{2}$ ir taškas P yra atitinkamos atkarpos $KL = a$ vidurio taškas (8 pav.). Iš tikrųjų stačiajame trikampyje KLB pusiaukraštinė, išvesta į įžambinę, lygi įžambinės pusei.



9 pav.

4 pavyzdys. Du skrituliai, kurių spinduliai r_1 ir r_2 ($r_1 > r_2$), rieda tiese l. Rasime šių skritulių vidinių liestinių susikirtimo taškų M aibę (žr. 9 pav.).

Kadangi trikampiai OPM ir QRM yra statūs ir turi po vieną lygų kryžminį kampą, tai jie yra panašūs. Todėl $OM : QM = r_1 : r_2$. Pažymėkime $\frac{r_1}{r_2} = x$. Vedame $QL \parallel l$, $MN \perp l$; tiesė MN kertasi su tiese

QL taške K. Trikampiai MQK ir OQL yra panašūs, todėl $\dfrac{MK}{OL} = \dfrac{MQ}{OQ}$.

Kadangi $OL = r_1 - r_2$, $OM = r_1 x$, $QM = r_2 x$, $OQ = (r_1 + r_2)x$, tai

$$MK = \frac{QM \cdot OL}{OQ} = \frac{r_2 x(r_1 - r_2)}{(r_1 + r_2)x} = \frac{r_1 r_2 - r_2^2}{r_1 + r_2}.$$

Todėl

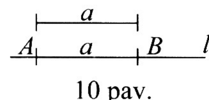
$$MN = r_2 + \frac{r_1 r_2 - r_2^2}{r_1 + r_2} = \frac{2r_1 r_2}{r_1 + r_2}.$$

Įrodėme, kad visi vidinių liestinių susikirtimo taškai yra vienodai nutolę nuo tiesės l, todėl jie priklauso tiesei, lygiagrečiai su tiese l ir nutolusiai nuo jos atstumu $\dfrac{2r_1 r_2}{r_1 + r_2}$. Taigi ieškomoji geometrinė vieta yra tiesė, lygiagreti su tiese l.

Geometrinės vietos gali būti taikomos sprendžiant brėžimo uždavinius, kurių tikslas – rasti vieną tašką. Jei tas taškas turi tenkinti dvi sąlygas, tai iš pradžių antrosios sąlygos nepaisome ir nubrėžiame aibę taškų, tenkinančių pirmąją sąlygą. Po to atmetame pirmąją sąlygą ir nubrėžiame aibę taškų, tenkinančių antrąją sąlygą. Abi sąlygas tenkina nubrėžtųjų geometrinių vietų sankirtos taškai. Bet kuris plokštumos taškas, nepriklausantis šiai sankirtai, netenkina bent vienos iš nurodytųjų sąlygų. Tokia yra geometrinių vietų taikymo brėžimo uždaviniams spręsti esmė.

Mokykliniame geometrijos kurse Jūs susipažinote su paprasčiausiais brėžimo uždaviniais. Trumpai priminsime juos.

(1) Duotoje tiesėje nuo duotojo taško atidėkime atkarpą, lygią duotajai (10 pav.).



10 pav.

Duota: tiesė l, jai priklausantis taškas A ir atkarpa a.

Brėžimas.

1) Brėžiame apskritimą, kurio centras yra taškas A, o spindulys a.

2) Tiesė l ir apskritimas kertasi taške B. Nubrėžta atkarpa $AB = a$ yra ieškomoji.

Šio paties paprasčiausio brėžimo uždavinio sprendimas reikalauja gana ilgo aprašymo. Todėl atliekamus brėžimo žingsnius užrašysime

simboliškai:

1) $(A;\ a)$ – taip užrašysime apskritimą, kurio centras A ir spindulys yra atkarpa a.

2) $l \cap (A;\ a) = B \Rightarrow AB = a$.

(2) Nubrėžkime kampą, lygų duotajam kampui A (11 pav.).

Brėžimas.

1) Nubrėžiame tiesę l.

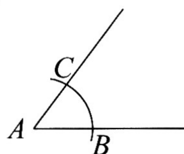
2) Imame bet kokį šios tiesės l tašką O ($O \in l$).

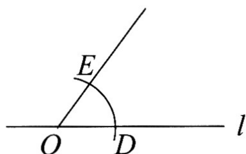
3) $(A;\ R) \cap \angle A = \{B \text{ ir } C\}$ (R – bet kokia atkarpa).

4) $(O;\ R) \cap l = D$.

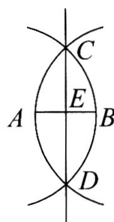
5) $(D;\ BC) \cap (O;\ R) = E$.

6) $OE \Rightarrow \angle DOE = \angle A$.





11 pav.



12 pav.

(3) Duotąją atkarpą padalykime pusiau.

Duota: *atkarpa AB* (12 pav.).

Brėžimas.

1) $(A;\ AB)$.

2) $(B;\ AB)$.

3) $(A;\ AB) \cap (B;\ AB) = \{C \text{ ir } D\}$.

4) $CD \cap AB = E \Rightarrow AE = EB$.

(4) Duotąjį $\angle A$ padalykime pusiau.

Duota: $\angle A$ (13 pav.).

Brėžimas.

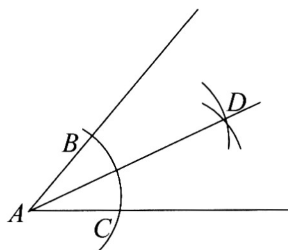
1) $(A;\ R) \cap \angle A = \{B \text{ ir } C\}$.

2) $(B;\ R)$.

3) $(C;\ R)$.

4) $(B;\ R) \cap (C;\ R) = D$.

5) $AD \Rightarrow \angle BAD = \angle CAD$.



13 pav.

(5) Per duotąjį tašką išveskime tiesę, lygiagrečią su duotąja tiese.

Duota: 1) A, 2) l ($A \notin l$) (14 pav.).

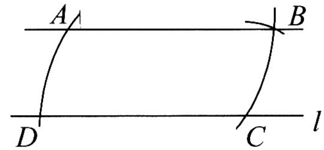
Brėžimas.

1) $(A;\ R) \cap l = C$.

2) $(C;\ R) \cap l = D$.

3) $(C;\ AD) \cap (A;\ R) = B$.

4) $AB \Rightarrow AB \parallel l$.



14 pav.

(6) Per duotąjį tašką A nubrėžkime tiesę, statmeną duotajai tiesei l.

Duota: A, l.

a) $A \notin l$ (15 pav.).

Brėžimas.

1) $(A;\ R) \cap l = \{C \text{ ir } D\}$.

2) $(C;\ R) \cap (D;\ R) = B$.

3) $AB \Rightarrow AB \perp l$.

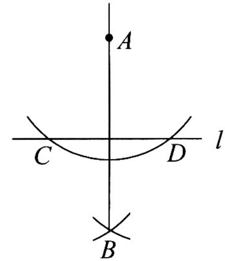
b) $A \in l$ (16 pav.).

Brėžimas.

1) $(A;\ R) \cap l = \{C \text{ ir } D\}$.

2) $(C;\ R_1) \cap (D;\ R_1) = B$ $(R_1 > R)$.

3) $AB \Rightarrow AB \perp l$.



15 pav.

(7) Duotąją atkarpą padalykime duotuoju santykiu $m : n$, čia m ir n yra duotosios atkarpos.

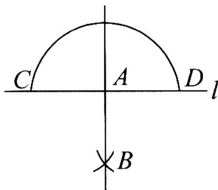
Duota: atkarpos AB, m ir n (17 pav.).

Brėžimas.

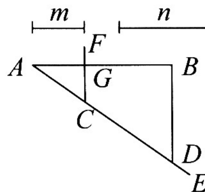
1) Spindulys AE, nesantis tiesėje AB.

2) Atkarpos $AC = m$ ir $CD = n$ (žr. **(1)**).

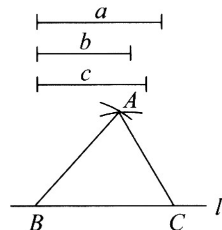
3) BD.



16 pav.



17 pav.



18 pav.

4) $CF \parallel BD$.

5) $CF \cap AB = G \Rightarrow AG : GB = m : n$.

(8) Nubrėžkite trikampį, kai duotos trys kraštinės.

Duota: atkarpos *a*, *b*, *c* (18 pav.).

Brėžimas.

1) Bet kuri tiesė *l*.

2) $BC = a$ (žr. **(1)**) ($B \in l$, $C \in l$).

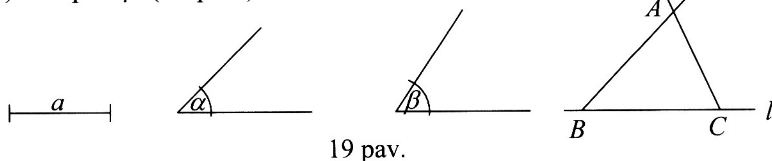
3) $(B; c) \cap (C; b) = A$.

4) Atkarpos *AB* ir $AC \Rightarrow \Delta\, ABC$ yra ieškomasis.

Pastaba. Uždavinys turi sprendinį, kai dviejų trumpesniųjų atkarpų suma yra didesnė už trečiąją atkarpą.

(9) Nubrėžkime trikampį, žinodami vieną kraštinę ir du kampus prie jos.

Duota: 1) atkarpa *a*, 2) kampas α;
3) kampas β (19 pav.).



19 pav.

Brėžimas.

1) Bet kuri tiesė *l*.

2) $BC = a$ (žr. **(1)**) ($B \in l$, $C \in l$).

3) $\angle CBE = \angle\alpha$ (žr. **(2)**).

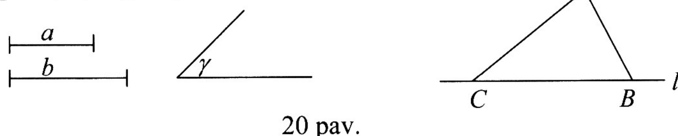
4) $\angle BCF = \angle\beta$ (žr. **(2)**).

5) $BE \cap CF = A \Rightarrow \Delta ABC$ – ieškomasis.

Pastaba. Uždavinys turi sprendinį, kai $\alpha + \beta < 180°$.

(10) Nubrėžkime trikampį, kai žinomos dvi jo kraštinės ir kampas tarp jų.

Duota: 1) atkarpa *a*; 2) atkarpa *b*;
3) kampas γ (20 pav.).

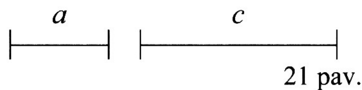


20 pav.

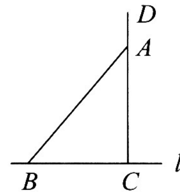
Brėžimas.
1) Bet kuri tiesė l.
2) $BC = a$ (žr. **(1)**) $(B \in l, C \in l)$.
3) $\angle BCD = \angle\gamma$ (žr. **(2)**).
4) $CA = b$ (žr. **(1)**) $(A \in CD)$.
5) $AB \Rightarrow \Delta ABC$ – ieškomasis.

Pastaba. Uždavinys turi sprendinį, jei $\gamma < 180°$.

(11) Nubrėžkime statųjį trikampį, žinodami įžambinę ir statinį.
Duota: 1) atkarpa a; 2) atkarpa c (21 pav.).

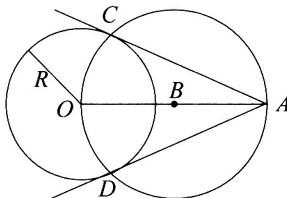


21 pav.

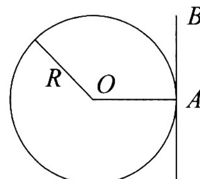


Brėžimas.
1) Bet kuri tiesė l.
2) $BC = a$ (žr. **(1)**) $B,\ C \in l$.
3) $CD \perp l$ (žr. (6, 2)).
4) $(B; c) \cap CD = A$.
5) $AB \Rightarrow \Delta ABC$ – ieškomasis.

(12) Per pasirinktąjį tašką nubrėžkime duotojo apskritimo liestinę.
a) Duota: 1) taškas A, 2) apskritimas $(O; R)$, $A \notin (O; R)$ (22a pav.).
Brėžimas.
1) Atkarpa AO.
2) OA dalijame pusiau **(3)**, $OB = BA$.
3) $(B; AB) \cap (O; R) = \{C \text{ ir } D\}$.
4) AC ir AD – ieškomos liestinės.



22a pav.



22b pav.

b) Duota: 1) taškas A; 2) apskritimas $(O; R)$, $A \in (O, R)$ (22b pav.).

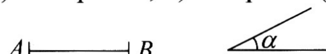
Brėžimas.

1) Apskritimo spindulys OA.

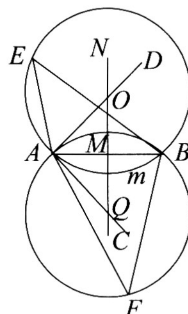
2) $AB \perp OA$ (žr. **(6)**) $\Rightarrow$ AB – ieškomoji liestinė.

(13) Nubrėžkime aibę plokštumos taškų, iš kurių atkarpa AB matoma kampu α.

Duota: 1) atkarpa AB; 2) kampas α (23a pav.).



23a pav.



23b pav.

Brėžimas (23b pav.).

1) $\angle BAC = \alpha$ (žr. **(2)**).

2) $AD \perp AC$ (žr. **(5)**, b).

3) $MN \perp AB$, $(AM = MB)$.

4) $MN \cap AD = O$.

5) $MO = MQ$ $(O, Q \in MN)$.

6) $(O;\, OA) \Rightarrow \cup AEB$ – ieškomasis.

7) $(Q;\, QA) \Rightarrow \cup AFB$ – ieškomasis.

Įrodymas. $\angle AEB = \frac{1}{2} \cup AmB$ (įbrėžtinis kampas). Kampas BAC yra (kampas tarp stygos AB ir liestinės AC) lygus $\frac{1}{2} \cup AmC$. Tokiu būdu $\angle AEB = \angle \alpha$.

Kaip žinome, brėžimo uždavinio sprendimas paprastai susideda iš 4 etapų: 1) analizės; 2) brėžimo; 3) tyrimo ir 4) įrodymo.

1. Analizė. Jos tikslas – nustatyti ryšius tarp duotųjų figūrų (taškų, tiesių, apskritimų) ir ieškomosios figūros. Analizę atliekame tokia seka: tariame, kad ieškomą figūrą nubrėžti mokame ir iš rankos, be brėžimo įrankių nubraižome jos eskizą. Eskizą brėžiame kuo bendresniu pavidalu (jei trikampį – tai įvairiakraštį; jei lygiagretainį – tai jokiu būdu ne rombą ir ne stačiakampį). Jei sąlygoje duota atkarpų ar kampų suma arba skirtumas, tai būtinai šią sumą ar skirtumą pavaizduojame brėžinyje. Jei dar neaiškus sprendimo kelias, eskizą papildome kitomis figūromis.

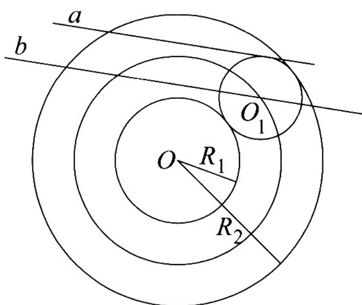
2. Brėžimas. Reikia nurodyti pagrindinių brėžimo uždavinių arba anksčiau spręstų brėžimo uždavinių seką ir atlikti brėžimą naudojantis tik skriestuvu ir liniuote.

3. Įrodymas. Patikriname, ar nubrėžtoji figūra tenkina visas uždavinio sąlygas.

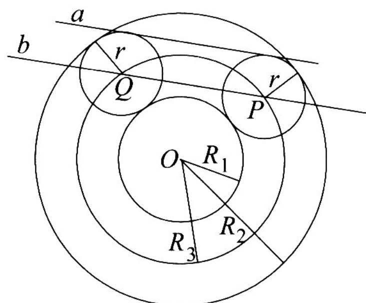
4. Tyrimas. Juo siekiame išsiaiškinti: 1) ar bet kaip parinkus duomenis uždavinys turi sprendinį ir kiek sprendinių turi; 2) ar sprendinių skaičius priklauso nuo duotųjų figūrų išsidėstymo. Kartais tyrimas atliekamas tikrinant kiekvieną brėžimo žingsnį. Taip patikriname ar egzistuoja sprendinys. Tačiau lieka neaišku, ar egzistuoja kiti sprendiniai.

5 pavyzdys. Nubrėžkime apskritimą, liečiantį du duotus koncentrinius apskritimus $(O; R_1)$, $(O; R_2)$ ir duotąją tiesę a $(R_1 < R_2)$.

Analizė. Tegul ieškomasis apskritimas $(O_1; r)$ nubrėžtas (24 pav.). Jis liečia duotuosius apskritimus ir tiesę a, jo spindulys $r = \frac{1}{2}(R_2 - R_1)$. Tokių apskritimų centrų aibė yra geometrinė vieta taškų, nutolusių nuo taško O atstumu



24 pav.



25 pav.

$$R_1 + r = R_1 + \frac{1}{2}(R_2 - R_1) = \frac{1}{2}(R_1 + R_2) = R_3,$$

t. y. apskritimas $(O; R_3)$. Taškas O_1 yra tiesėje b, lygiagrečioje su tiese a ir nuo jos nutolusioje atstumu $\frac{1}{2}(R_2 - R_1)$.

Brėžimas. Sakykime, kad $(O; R_1)$ ir $(O; R_2)$ du duotieji apskritimai, a duotoji tiesė (25 pav.). Brėžiame atkarpas

$$R_3 = \frac{1}{2}(R_2 + R_1)$$

ir

$$r = \frac{1}{2}(R_2 - R_1).$$

Nubrėžiame tiesę *b,* lygiagrečią su tiese *a* ir nutolusią nuo jos atstumu *r* (žr. **III**). Nubrėžiame apskritimą $(O;\ R_3)$. Tiesės *b* ir apskritimo $(O;\ R_3)$ sankirta yra ieškomųjų apskritimų centrai *P* ir *Q*. Apskritimai (*Q*; *r*), (*P*; *r*) yra ieškomieji.

Įrodymas išplaukia iš brėžimo. Kadangi apskritimo (*Q*; *r*) centras yra žiedo tarp duotųjų koncentrinių apskritimų vidurinėje linijoje. t. y. apskritime $(O;\ R_3)$ ir $Q \in b$, kuri yra lygiagreti su *a* ir nuo jos nutolusi atstumu *r*, tai nubrėžtasis apskritimas liečia tris duotąsias figūras.

Tyrimas. Sakykime, kad *d* yra atstumas nuo taško *O* iki tiesės *a*.

1) Jei tiesė *a* nekerta nei vieno duotojo apskritimo $(d > R_2)$, sprendinių nėra.

2) Jei *a* liečia didįjį apskritimą $(O; R_2)$, t. y. $d = R_2$, – vienas sprendinys.

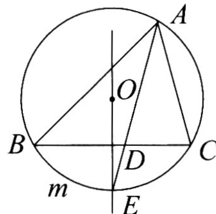
3) Jei *a* kerta tik didįjį apskritimą dviejuose taškuose ($R_1 < d < R_2$), – du sprendiniai (25 pav.).

4) Jei *a* kerta didįjį apskritimą ir liečia mažąjį apskritimą ($d = R_1$), – trys sprendiniai (nubrėžkite brėžinį).

5) Jei *a* kerta kiekvieną duotąjį apskritimą dviejuose taškuose ($d < R_1$), egzistuoja keturi sprendiniai (nubrėžkite brėžinį).

6 pavyzdys. Nubraižysime trikampį, žinodami pagrindą, prieš jį esantį kampą ir tašką pagrinde, per kurį eina šio kampo pusiaukampinė.

Analizė (26 pav.). Tegul trikampis *ABC* nubrėžtas: $BC = a$, $\angle BAC = \alpha$. Vadinasi, iš taško *A* atkarpa *BC* matoma duotuoju kampu α, todėl taškas *A* priklauso geometrinei vietai taškų, iš kurių atkarpa *BC* matoma kampu α (žr. **(13)**).



26 pav.

Tegul *AD* yra šio trikampio pusiaukampinė. Ji eina per žinomą atkarpos *BC* tašką *D* ir dar turi eiti per lanko $\cup BmC$ vidurio tašką *E*. Todėl taškas *E* yra atkarpos *BC* vidurio statmenyje.

Duota: atkarpa *BC*, taškas $D \in BC$ ir kampas α (27a pav.).



27a pav.

Brėžimas (27b pav.).

1) Brėžiame geometrinę vietą taškų, iš kurių atkarpa BC matoma $\angle \alpha$, t. y. $(O;\ OB)$.

2) Brėžiame atkarpos BC vidurio statmenį MN.

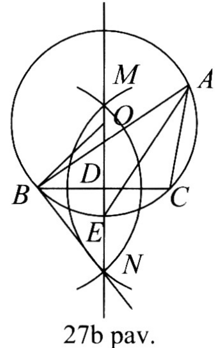
3) $MN \cap (O;\ OB) = E$.

4) $DE \cap (O;\ OB) = A$.

5) AB ir $AC \Rightarrow \Delta\ BAC$ – ieškomasis.

Įrodymas išplaukia iš brėžimo.

Tyrimas. Jei $\alpha < 180^\circ$, sprendinys egzistuoja.



27b pav.

ŠEŠTOJI UŽDUOTIS

1. Nubrėžkite apskritimą, liečiantį dvi duotas lygiagrečias tieses a, b ir trečią tiesę c, kertančią tieses a ir b.

2. Trikampis ABC lygiašonis $(AB = BC)$. Iš taško B spinduliu, mažesniu už BC, nubrėžtas apskritimas. Tame apskritime raskite tašką P, kuriame šio apskritimo liestinė yra kampo APC pusiaukampinė.

3. Nubrėžkite r spindulio apskritimą, liečiantį du duotus apskritimus $(O;\ R)$ ir $(O_1;\ R_1)$ $(r < R, r < R_1)$.

4. Nubrėžkite rombą, kurio dvi priešingos viršūnės A ir C būtų duotuose taškuose, o trečioji viršūnė duotame apskritime $(O;\ R)$.

5. Nubrėžkite keturkampį, žinodami jo keturias kraštines ir kampą α.

6. Nubrėžkite trikampį, kai duota kraštinė a, pusiaukraštinė m_c ir kampas B.

7. Nubrėžkite trikampį, žinodami kraštines a, b ir aukštinę h_a.

8. Nubrėžkite trikampį, kai žinoma kraštinė a, pusiaukraštinė m_a ir kampas A.

9. Plokštumoje duoti taškai A ir B. Raskite geometrinę vietą taškų M, kurių atstumų kvadratų skirtumas $AM^2 - BM^2$ yra pastovus dydis.

10. Raskite geometrinę vietą taškų, iš kurių nubrėžtos apskritimo (O; R) liestinės būtų duoto ilgio a.



VII. AIBĖS, TAIKYMO UŽDAVINIAI

Antanas Apynis
(Vilniaus universitetas)

Aibės sąvoka matematikoje yra viena iš svarbiausių, todėl pažintis su aibių teorijos pagrindais yra būtina ne tik matematikams, bet ir daugelio kitų sričių specialistams. Kasdienėje kalboje aibė reiškia bet kurią skirtingų objektų visumą. Matematikoje aibė suprantama analogiškai. Tai kurių nors matematinių objektų, vadinamų *aibės elementais*, visuma. Aibės elementai gali būti bet kokios prigimties skaičiai, skaičių rinkiniai, geometrinės figūros, abstraktūs simboliai ir kt. Šie objektai dažnai vadinami *aibės taškais* nepriklausomai nuo to, ar įmanoma juos pavaizduoti tiesės, plokštumos bei erdvės taškais, ar ne.

Apibrėžti aibę reiškia nusakyti (apibūdinti) jos elementus. Kai elementų yra baigtinis skaičius (ir nedidelis), tai juos galima tiesiog išvardyti. Kitais atvejais yra nusakoma tik aibės konstravimo taisyklė.

Užrašant aibes jos žymimos kuria nors paprastai didžiąja raide, pavyzdžiui, A, B, C, X, Y, Z ir t. t. Aibių elementus įprasta žymėti mažosiomis raidėmis. Elementai užrašomi tarp figūrinių skliaustų.

1 pavyzdys. Užrašas $A=\{1;2;7;9\}$ reiškia, kad aibę A sudaro natūralieji skaičiai 1, 2, 7 ir 9.

2 pavyzdys. Aibė $B=\{b:-1\le b\le 5\}$ yra realiųjų skaičių uždaras intervalas [–1; 5].

Sprendžiant uždavinius bei nagrinėjant teorines problemas kartais tenka aiškintis, ar kuris nors matematinis objektas, tarkime, a priklauso tam tikrai aibei, ar ne. Tada labai praverčia simbolis „$\in$“. Užrašas $a\in A$ reiškia, kad a yra aibės A elementas, o užrašas $a\notin B$ reiškia, kad a nėra aibės B elementas.

Aibė A yra vadinama aibės B ***poaibiu*** (rašoma $A\subset B$), jeigu kiekvienas aibės A elementas kartu yra ir aibės B elementas. Pavyzdžiui, natūraliųjų skaičių aibė N yra realiųjų skaičių aibės R poaibis, t. y. $\mathrm{N}\subset \mathrm{R}$.

Sakoma, kad aibės A ir B yra lygios (rašoma $A=B$), jeigu jas sudaro tie patys elementai. Pavyzdžiui, aibės $A=\{1;5\}$ ir

$B=\{x:x^2-6x+5=0\}$ yra lygios, o aibės $C=\{x:x^2=0\}$ ir $D=\left\{x:x^2+\frac{1}{x}=\frac{1}{x}\right\}$ nėra lygios $(C \neq D)$.

Aibių A ir B lygumą ($A=B$) galima apibūdinti naudojant poaibio sąvoką: *aibės A ir B yra lygios tada ir tik tada, kai aibė A yra aibės B poaibis, o aibė B yra aibės A poaibis.* Glaustai šį teiginį galima užrašyti taip:

$$A=B \Leftrightarrow A \subset B \text{ ir } B \subset A.$$

Taikant aibes įvairioms problemoms spręsti kartais tenka skaičiuoti, kiek elementų turi aibė. Tačiau ne visada lengva tuos elementus suskaičiuoti. Panagrinėkime, pavyzdžiui, aibę

$$X=\{x:x^2-4\,|\,x+1\,|+5x+3=0\}.$$

Tai lygties $x^2-4\,|\,x+1\,|+5x+3=0$ sprendinių aibė. Norėdami pasakyti, kiek elementų (lygties sprendinių) turi aibė X, turėtume išspręsti lygtį ir tik tada galėtume suskaičiuoti, kiek elementų turi aibė X. Atsakymas būtų 2, nes

$$X=\left\{\frac{3+\sqrt{13}}{2};\frac{11-\sqrt{29}}{2}\right\}.$$

Tenka susidurti su dar sunkesne problema. Užrašius aibę tam tikra jos konstravimo taisykle gali išaiškėti, kad nėra nė vieno matematinio objekto, kuris tą taisyklę tenkintų. Tada labai praverčia tuščiosios aibės sąvoka ir simbolis $\varnothing$. Štai, pavyzdžiui, aibė

$$A=\{a:a\in \mathrm{R}, \sqrt{1-a^2}\,\lg(a-5)=0\}$$

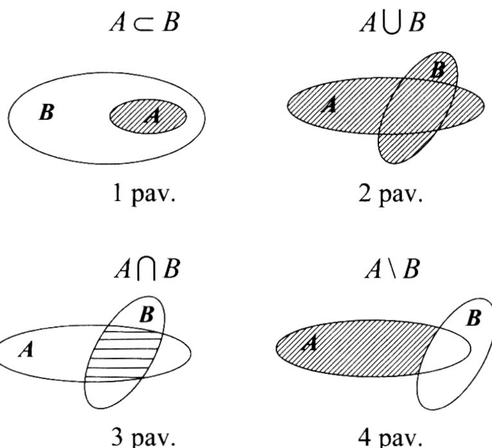
neturi nė vieno elemento, todėl rašoma $A=\varnothing$.

Formaliai tuščioji aibė $\varnothing$ apibūdinama kaip aibė, kuri neturi elementų. Ji laikoma kiekvienos aibės poaibiu. Nors intuityviai tuščiosios aibės apibūdinimas yra lengvai suprantamas, tačiau gilesnė šios sąvokos analizė veda prie rimtų filosofinių problemų. Palikę jas ramybėje, aptarkime, kaip iš turimų aibių, sakykime, A ir B yra sudaromos (konstruojamos) naujos aibės. Prisiminkime aibių *sąjungos*, *sankirtos* ir *skirtumo* apibrėžimus:

- *aibių A ir B sąjunga* (žym. $A \cup B$) yra vadinama aibė $\{x:x\in A \text{ arba } x\in B\}$;

- *aibių A ir B sankirta* (žym. $A \bigcap B$) yra vadinama aibė $\{x : x \in A \text{ ir } x \in B\}$;
- *aibių A ir B skirtumu* (žym. $A \setminus B$) yra vadinama aibė $\{x : x \in A \text{ ir } x \notin B\}$.

Anglų filosofas Dž. Venas (John Venn, 1834–1883) pasiūlė aibes vaizduoti plokštumos sritimis, apribotomis uždaromis kreivėmis. Tokie piešiniai yra vadinami Veno diagramomis. Naudojant Veno diagramas visiškai nesunku suprasti aibės poaibio sąvoką bei visus veiksmus su aibėmis (žr. 1–4 pav.).



1 pav. 2 pav. 3 pav. 4 pav.

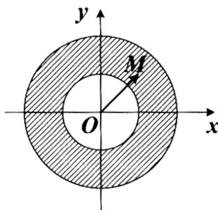
Veno diagramų (abstrakčių piešinių) neturėtume painioti su geometriniais aibių vaizdais. Tokie vaizdai yra gaunami, kai aibės elementai yra realieji skaičiai, realiųjų skaičių poros ar realiųjų skaičių trejetai. Išnagrinėkime porą pavyzdžių.

3 pavyzdys. Pavaizduokime stačiakampėje Dekarto koordinačių sistemoje aibę

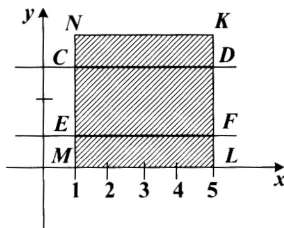
$$A = \{(x; y) : 1 \le x^2 + y^2 \le 4\}.$$

Sprendimas. Prisiminkime, kad $\sqrt{x^2 + y^2}$ yra taško $M(x; y)$ atstumas nuo koordinačių pradžios taško $O(0; 0)$. Pažymėkime jį $d(0; M)$. Vadinasi, aibės A geometrinis vaizdas yra figūra, kurios taškai M tenkina sąlygą $1 \le d(O, M) \le 2$. Sąlyga $d(0; M) = R$ apibrėžia

apskritimą, kurio centras yra $O(0; 0)$, o spindulys lygus R. Taigi aibės A geometrinis vaizdas yra žiedas tarp dviejų koncentrinių apskritimų (žr. 5 pav.). Vidinio apskritimo spindulys yra lygus 1, o išorinio apskritimo spindulys lygus 2.



5 pav.



6 pav.

4 pavyzdys. Stačiakampėje Dekarto koordinačių sistemoje pavaizduokime aibę $G = A \cap B$, kai

$$A = \{(x; y): 1 \le x \le 5, 0 \le y \le 4\},$$
$$B = \{(x; y): x \in \mathrm{R}, |y - 2| = 1\}.$$

Sprendimas. Aibės A geometrinis vaizdas yra stačiakampiu $MNKL$ apribota plokštumos sritis (žr. 6 pav.). Aibės B taškų $(x; y)$ ordinatės gali įgyti dvi reikšmes ($y_1 = 1$ ir $y_2 = 3$) su kiekviena abscisės reikšme x. Todėl šios aibės geometrinis vaizdas yra tiesių CD ir EF pora (žr. 6 pav.). Remdamiesi aibių sankirtos apibrėžimu, gauname, kad aibės $G = A \cap B$ geometrinis vaizdas yra atkarpų CD ir EF pora.

SEPTINTOJI UŽDUOTIS

1. Tegu P, Q ir R yra aibės $S = \{a; b; c; d; e; f; g\}$ poaibiai $P = \{a; b; c; d\}$, $Q = \{a; e\}$, $R = \{b; d; e; f\}$.

Išvardydami elementus, užrašykite šias aibes: $X = P \cap (Q \cup R)$, $Y = (P \cap R) \cup Q$, $Z = (P \setminus R) \setminus (Q \setminus R)$, $V = (S \setminus P) \cup (R \setminus Q)$.

2. Aibės A elementai yra penkiaženkliai skaičiai, kurie vienodai skaitomi ir iš kairės į dešinę, ir iš dešinės į kairę. Raskite šios aibės elementų skaičių.

3. Nustatykite, ar aibė $A=\{x:0\le x\le 2\pi\}=[0;2\pi]$ yra aibės $B=\left\{x;\sin^4\frac{x}{2}-\cos^4\frac{x}{2}=\sin\frac{2x-\pi}{2},\ x\ge 0\right\}$ poaibis.

4. Pavaizduokite Dekarto koordinačių sistemoje šias aibes:

$A=\{(x;y):0\le x\le 5,\ y\ge x-2\}$,
$B=\{(x;y):0\le x\le 5,\ y\le x+2\}$,
$C=A\cap B$.

5. Pavaizduokite Dekarto koordinačių sistemoje aibę
$Z=\{(x;y):-1\le x\le 4,\ |y-x|=1\}$.

6. Funkcija f apibrėžta formule:

a) $f(x)=-\frac{1}{x}$;
b) $f(x)=2x^4-1$;
c) $f(x)=2x-3$;
d) $f(x)=-\sin x$.

Nustatykite, kuriais iš šių atvejų aibė
$S=\{(x;f(x)-2x+1\}:x>0,\ f(x)-2x+1=0\}$
yra netuščia.

7. Nustatykite, ar galioja lygybė $A=B$, kai

$$A=\left\{(x;y):x\in \mathrm{R},\ y=\cos^2\left(\frac{17\pi}{2}-2x\right)+\cos 9x+5\right\},$$

$$B=\left\{(-x;y):x\in \mathrm{R},\ y=\cos^2\left(\frac{17\pi}{2}-2x\right)+\cos 9x+5\right\}.$$

8. Nustatykite, su kuriais realiaisiais skaičiais m aibės

$X_1=\{x:x\in \mathrm{R},\ x^2+2(m-3)\,x+m^2-7m+12=0\}$

ir

$X_2=\{x:x\in \mathrm{R},\ x^2+m^2x+(6-5m)x=0\}$ nesutampa ($X_1\ne X_2$).

9. Nustatykite, ar aibės $Z = Z_1 \cap Z_2$,

$Z_1 = \{(x; y) : x \in \mathrm{R}, y = (x-2)^2\}$,

$Z_2 = \{(x; y) : x \in \mathrm{R}, y = ax^2\}$,

elementų skaičius priklauso nuo parametro a reikšmių ($a \in \mathrm{R}$); raskite šią priklausomybę.

10. Matematikos uždavinių sprendimo konkurse dalyvavo 37 mokiniai. Jiems buvo pasiūlyta išspręsti po vieną algebros, geometrijos ir trigonometrijos uždavinį. Sprendimo rezultatus galima apibūdinti taip: algebros uždavinį išsprendė 23 mokiniai, geometrijos – 19, trigonometrijos – 16; algebros ir geometrijos uždavinį išsprendė 12 mokinių, algebros ir trigonometrijos – 10, geometrijos ir trigonometrijos – 7. Penki mokiniai neišsprendė nė vieno uždavinio. Nustatykite, keli mokiniai išsprendė visus tris uždavinius ir keli – tik du uždavinius.



VIII. IŠVESTINĖS IR INTEGRALAI

Antanas Skūpas
(Vilniaus licėjus)

Šios užduoties uždaviniams spręsti iš esmės pakanka medžiagos, išdėstytos matematikos vadovėliuose 12 klasei. Čia apsiribosime tik keliomis pastabomis ir pavyzdžiais.

1. Taikydami sudėtinės funkcijos diferencijavimo taisyklę, rasime funkcijos $g(x) = \arcsin x$ išvestinę. Kaip žinome, ši funkcija yra atvirkštinė funkcijai $f(x) = \sin x$, nagrinėjamai intervale $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$. Pati funkcija $g(x) = \arcsin x$ apibrėžta intervale $[-1; 1]$, reikšmių sritis – intervalas $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$. Todėl intervale $[-1; 1]$ teisinga tapatybė $\sin(\arcsin x) = x$.

Diferencijuodami šios lygybės abi puses, gauname $\cos(\arcsin x) \cdot (\arcsin x)' = 1$.

Iš čia $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\cos(\arcsin x)}$. Lieka pertvarkyti gautosios trupmenos vardiklį:

$$\cos(\arcsin x) = \sqrt{1 - (\sin(\arcsin x))^2} = \sqrt{1 - x^2}.$$

Atkreipsime dėmesį, kad kosinusas arksinuso reikšmių srityje, t. y., intervale $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ yra teigiamas, todėl prieš šaknį rašomas ženklas „+“.

Taigi

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Visai panašiai gali būti išvedama ir bendra formulė atvirkštinės funkcijos išvestinei apskaičiuoti.

2. Kai kada patogu išvestinę naudoti nelygybėms įrodyti.

Teorema. Sakykime, funkcijos $f(x)$ ir $g(x)$ yra diferencijuojamos intervale $[a;+\infty)$. Jeigu $f(a)\geq g(a)$ ir su visais $x>a$ teisinga nelygybė $f'(x)>g'(x)$, tai $f(x)>g(x)$ su visais $x>a$.

Įrodymas. Sudarykime funkciją $h(x)=f(x)-g(x)$. Iš teoremos sąlygų matyti, kad $h(a)\geq 0$ ir $h'(x)=(f(x)-g(x))'=f'(x)-g'(x)>0$ su visais $x>a$. Taikome funkcijai $h(x)$ Lagranžo teoremą intervale $[a;x]$. Pagal Lagranžo teoremą turi būti toks taškas $c\in(a;x)$, kad būtų teisinga $h(x)-h(a)=h'(c)(x-a)$. Kadangi $h'(c)>0$, $x-c>0$, tai $h(x)>h(a)$ su visais $x>a$, arba $f(x)-g(x)>h(a)$. Tuo labiau su visais $x>a$ bus teisinga nelygybė $f(x)-g(x)>0$ arba $f(x)>g(x)$.

Analogiškai įrodoma ir teorema intervalui $(-\infty;a)$.

Pavyzdys. Įrodysime, kad su visais $x>0$ teisinga nelygybė

$$x-\frac{x^2}{2}<\ln(1+x).$$

Pažymėkime $f(x)=\ln(1+x)$ ir $g(x)=x-\dfrac{x^2}{2}$.

Matome, kad

$$f(0)=g(0)=0.$$

$$f'(x)=(\ln(1+x))'=\frac{1}{1+x},$$

$$g'(x)=\left(x-\frac{x^2}{2}\right)'=1-x.$$

Liko įrodyti nelygybę

$$1-x<\frac{1}{1+x}.$$

Ją nesunkiai galime įrodyti, daugindami abi nelygybės puses iš teigiamo daugiklio $1+x$. Tačiau galima ir dar kartą pritaikyti teoremą: kai $x=0$, abi nelygybės pusės lygios 1. O išvestinėms teisinga akivaizdi nelygybė

$$-1<-\frac{1}{(1+x)^2} \text{ arba } 1>\frac{1}{(1+x)^2}.$$

3. Funkcijos išvestinė yra labai galingas instrumentas funkcijų savybėms tirti. Tačiau kai kada apskaičiuotos išvestinės labai sudėtingos ir patogiau naudoti kitus principus.

Pavyzdys. Kokį didžiausią plotą $S(a)$ gali turėti figūra, apribota tiesėmis $x = a$, $x = a + \pi$ ir kreivėmis $y = \sin\frac{x}{2}$, $y = \cos 2x + 2$?

Sprendimas. Nesunku įsitikinti, kad

$$2 + \cos 2x \geq \sin\frac{x}{2},$$

o lygybė teisinga tiktai taškuose $\pi + 4k\pi$, $k \in \mathrm{Z}$. Rasime tokios figūros plotą:

$$S(a) = \int_a^{a+\pi}\left(2 + \cos x - \sin\frac{x}{2}\right)dx =$$

$$= \left(2x + \sin x + 2\cos\frac{x}{2}\right)\Bigg|_a^{a+\pi} =$$

$$= 2\pi - 2\sin a - 2\sin\frac{a}{2} - 2\cos\frac{a}{2}.$$

Liko rasti funkcijos $S(a)$ didžiausią reikšmę. Tačiau jei bandytume rasti ją standartiškai, naudodami funkcijos išvestinę, susidurtume su nemažais sunkumais. Todėl $S(a)$ pertvarkykime:

$$S(a) = 2\pi - 2\sin\alpha - 2\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\frac{a}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\cos\frac{a}{2}\right) =$$

$$= 2\pi - 2\sin\alpha - 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}\sin\frac{a}{2} + \sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{a}{2}\right) =$$

$$= 2\pi - 2\sin\alpha - 2\sqrt{2}\sin\left(\frac{a}{2} + \frac{\pi}{4}\right) =$$

$$= 2\pi + 2\cos\left(\frac{\pi}{2} + a\right) - 2\sqrt{2}\sin\left(\frac{a}{2} + \frac{\pi}{4}\right) =$$

$$= 2\pi + 2\left(1 - 2\sin^2\left(\frac{a}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right) - 2\sqrt{2}\,\sin\left(\frac{a}{2} + \frac{\pi}{4}\right) =$$

$$= -4\sin^2\left(\frac{a}{2} + \frac{\pi}{4}\right) - 2\sqrt{2}\,\sin\left(\frac{a}{2} + \frac{\pi}{4}\right) + 2\pi + 2.$$

Pažymėkime $2\sin\left(\frac{a}{2} + \frac{\pi}{4}\right) = t$. Kintant a realiųjų skaičių aibėje R, t reikšmės užpildo intervalą $[-2; 2]$. Taigi lieka išsiaiškinti, kokią didžiausią reikšmę intervale $[-2; 2]$ įgyja kvadratinis trinaris $f(x) = -t^2 - \sqrt{2}\,t + 2\pi + 2$. Naudodami išvestinę arba tiesiog parabolės viršūnės koordinačių formules, nesunkiai rasime, kad

$$\max_{[-2;\,2]} f(x) = f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 2\pi + 2{,}5.$$

Taigi drauge ir

$$\max_{(-\infty;\,+\infty)} S(a) = 2\pi + 2{,}5.$$

AŠTUNTOJI UŽDUOTIS

1. Raskite $g'(1)$, jei $g(x) = x^5 f\left(\frac{1}{x^2}\right)$. Čia $f(x)$ – diferencijuojama visoje realiųjų skaičių aibėje R funkcija, tenkinanti sąlygas $f(1) = 3$, $f'(1) = 2$.

2. Raskite lyginės funkcijos $f(x)$ grafiko liestinę taške $x_0 = 1$, jei $f(x)$ visoje R diferencijuojama ir tenkina lygybę

$$f(2x^3 - x) - 3x^2 f(x^2 - 2x) = -x^6 - 12x^5 + 16x^4 - 7x^2 + 2.$$

Raskite tokią funkciją $f(x)$.

3. Įrodykite, kad su visais $x \in (-1; +\infty)$ teisinga nelygybė

$$\ln(1 + x) < e^x.$$

4. Duotos dvi funkcijos:

$$f(x)=\frac{3}{2}x \text{ ir } g(x)=2x-\sqrt{1+x^2}.$$

4. 1. Įrodykite, kad abi funkcijos visoje R yra didėjančios, o jų grafikai bendrų taškų neturi.

4. 2. Pažymėkime M_1M_2 tiesės $y=a$ atkarpą, kurios galai yra funkcijų $f(x)$ ir $g(x)$ grafikų taškai. Su kuria a reikšme tokia atkarpa trumpiausia? Koks jos ilgis?

5. Statybose dažnai naudojami mediniai stačiakampio skerspjūvio balkiai. Tokio balkio atsparumas lenkimui proporcingas skerspjūvio pločio ir aukščio kvadrato sandaugai. Turime d cm skersmens rąstą. Kokie turi būti pjaunamo balkio skerspjūvio matmenys, kad jis būtų stipriausias?

6. Apskaičiuokite integralą $\int_0^1 \arcsin x\,dx$. Nubraižykite kreivinę trapeciją, kurios plotą šis integralas išreiškia.

7. Plokštumoje xy pavaizduokite kreivę, apibrėžtą lygtimi

$$|y-3|=2|x-2|-x^2+4x-1.$$

Raskite figūros, apribotos šia kreive, plotą.

8. Tiesėmis $y=1$, $y=2$ ir parabolėmis $y=ax^2$, $y=\frac{1}{2}ax^2$ pusplokštumėje $x\geq 0$ apribotos figūros plotą pažymėkime $S(a)$. Kokią didžiausią reikšmę $S(a)$ gali įgyti, kai $a\geq 1$?

9. Per kreivės tašką nubrėžta tiesė, statmena liestinei, nubrėžtai per tą patį tašką, vadinama kreivės normale. Per parabolės $y=x^2$ tašką nubrėžta normalė $y=ax+b$. Kokį mažiausią plotą turi figūra, kurios taškai tenkina sąlygą $x^2\leq y\leq ax+b$?

10. Taurelės vidinis paviršius – sukinys, gautas sukant parabolės $y = a x^2$, $0 \leq x \leq \sqrt{6}$ lanką apie ordinačių ašį. Į taurelę telpa 72 kubiniai vienetai skysčio. Kokiame aukštyje nuo dugno bus skysčio paviršius įpylus jo į taurelę 24 kubinius vienetus?



BAIGIAMOJI UŽDUOTIS

Antanas Apynis, Eugenijus Stankus (Vilniaus universitetas), Juozas Šinkūnas (Vilniaus pedagoginis universitetas)

1. Raskite skaičių $2\ 772$, $7\ 938$ ir $3\ 087$ didžiausią bendrą daliklį.

2. Raskite plotą figūros, apribotos parabole $y = \dfrac{x^2}{2} - 4$ ir tiese $y = 4$.

3. Iš trijų atkarpų, kurių ilgiai a, b ir c, galima sudaryti trikampį. Ar galima sudaryti trikampį iš atkarpų, kurių ilgiai $\sqrt[3]{a}$, $\sqrt[3]{b}$ ir $\sqrt[3]{c}$ ($a > b > c$)? Atsakymą pagrįskite.

4. Kalbininkų vakaronėje dalyvavo: 100 mokinių, mokančių anglų kalbą, 100 mokinių, mokančių vokiečių kalbą, 100 mokinių, mokančių prancūzų kalbą. Dešimt mokinių mokėjo visas tris kalbas, o 90 mokinių – tik po vieną: 20 – anglų kalbą, 30 – vokiečių kalbą ir 40 – prancūzų kalbą. Kiek iš viso mokinių dalyvavo kalbininkų vakaronėje?



Užduočių sprendimai



STOJAMOSIOS UŽDUOTIES SPRENDIMAS

1. Tegu ieškomasis triženklis skaičius yra $\overline{abc}$. Tuomet:

$100a + 10b + c = c^3 \Rightarrow 10(10a + b) = (c-1)\,c\,(c+1)$.

Ieškant mažiausio skaičiaus, tenkinančio paskutiniąją lygybę, galimi tokie trys atvejai:

1) $c - 1 = 5 \Leftrightarrow c = 6 \Rightarrow \overline{abc} = 216$;

2) $c = 5 \Rightarrow \overline{abc} = 125$;

3) $c + 1 = 10 \Rightarrow \overline{abc} = 729$.

Taigi mažiausias iš šių skaičių yra 125.

Ats.: 125.

Pastaba. Atsakymą galima rasti ir tiesiogiai tikrinant: $1^3 = 1$, $2^3 = 8$, $3^3 = 27$, $4^3 = 64$, $5^3 = 125$.

2. Ne. Nes priešingu atveju kiekvienoje grupėje skaičių suma būtų lyginė ir trijų grupių suma taip pat lyginė. Iš tikrųjų $1 + 2 + ... + 21 = 21 \cdot 11$ – nelyginis skaičius.

3. Duotąjį reiškinį pertvarkykime taip:

$x^4 + 2004x^2 + 2003x + 2004 =$

$= x^4 + x^3 + x^2 + 2003x^2 + 2003x + 2003 - x^3 + 1 =$

$= x^2(x^2 + x + 1) + 2003(x^2 + x + 1) - (x-1)(x^2 + x + 1) =$

$= (x^2 + x + 1)\,(x^2 + 2003 - x + 1) = (x^2 + x + 1)\,(x^2 - x + 2004)$.

4. Lygtį $mn^2 + 3n^2 - m = 108$ pertvarkome šitaip:

$$(n^2 - 1)(m + 3) = 105.$$

Skaičiai ($n^2 - 1$) yra nelyginiai. Jų ieškosime tarp skaičiaus 105 daliklių 1, 3, 5, 7, 15, 21, 35, 105. Tuomet n^2 gali būti tik 4, 16 ir 36. Taigi $(n^2 - 1)$ gali būti tik skaičiai 3, 15 ir 35, o ($m + 3$) –

atitinkamai skaičiai 35 ir 7 ($m+3$ negali būti lygi 3, nes tuomet $m>0$). Vadinasi, lieka tik tokie galimi atvejai: $m=32$, $n=2$ arba $m=4$, $n=4$.

Ats.: $\{(32;2);(4;4)\}$.

5. Duotąją lygčių sistemą ekvivalenčiai pertvarkykime taip:

$$\begin{cases} 2(x+y)=5xy, \\ 8(x^3+y^3)=65. \end{cases} \sim \begin{cases} 2(x+y)=5xy, \\ 8(x+y)(x^2-xy+y^2)=65. \end{cases} \sim$$

$$\begin{cases} 2(x+y)=5xy, \\ 8(x+y)((x+y)^2-3xy)=65. \end{cases}$$

Pažymėkime $xy=u$. Iš pirmosios lygties $x+y=\frac{5xy}{2}=\frac{5u}{2}$. Įrašę tai į antrąją lygtį, gauname $25u^3-12u-13=0$. Nesunku pastebėti, kad $u=1$ yra šios lygties sprendinys. Tuomet

$$25u^3-12u-13=(u-1)(25u^2+13u+13),$$

o lygtis $25u^2+13u+13=0$ sprendinių neturi. Taigi duotoji lygčių sistema ekvivalenti sistemai

$$\begin{cases} xy=1, \\ x+y=\frac{5}{2}, \end{cases}$$

kurios sprendiniai yra $\left(2;\frac{1}{2}\right), \left(\frac{1}{2};2\right)$.

Ats.: $\left\{\left(2;\frac{1}{2}\right), \left(\frac{1}{2};2\right)\right\}$.

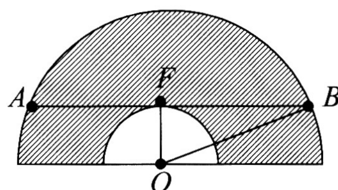
6. Banko palūkanų procentą pažymėkime x. Po metų fermeris grąžino pinigų sumą $\frac{3}{4}S\left(1+\frac{x}{100}\right)$, o liko grąžinti $\frac{1}{4}S\left(1+\frac{x}{100}\right)$. Dar po metų jis sumokėjo likusią skolą $\frac{1}{4}S\left(1+\frac{x}{100}\right)^2$. Taigi sudarome

lygtį $\frac{1}{4}S\left(1+\frac{x}{100}\right)^2=0{,}36S$. Iš čia $1+\frac{x}{100}=\sqrt{4\cdot 0{,}36}$, $x=20$.

Ats.: 20 %.

7. Pagal sąlygą su tenisininku, kurio numeris 1, vienoje grupėje gali būti tik tenisininkai, kurių numeriai 3, 8 arba 15. Pora (1, 8) būti negali, nes tada tenisininkas, kurio numeris 17 neturėtų poros. Jeigu tenisininkui Nr. 1 priskirtume tenisininką Nr. 3, tai tuomet tenisininkas Nr. 6 galėtų būti vienoje poroje tik su tenisininku Nr. 10. Tačiau tada tenisininkas Nr. 15 neturėtų poros. Taigi pora (1, 3) taip pat negali būti. Liko tik pora (1, 15).

8. Sakykime, didžiojo pusskritulio spindulys lygus R, o mažojo pusskritulio spindulys – r. Ieškomosios figūros plotas S lygus didžiojo ir mažojo pusskritulių plotų skirtumui (žr. 1 pav.). Taigi



1 pav.

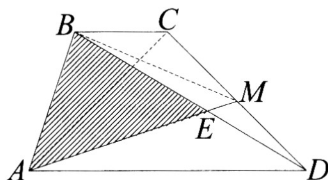
$$S=\frac{\pi(R^2-r^2)}{2}=\frac{\pi BF^2}{2}=\frac{\pi\left(\frac{1}{2}AB\right)^2}{2}=\frac{36\pi}{2}=18\pi.$$

Ats.: 18π.

9. 1 būdas. Trikampių ADE ir EDM pagrindai yra vienoje tiesėje, o aukštinė bendra. Kadangi $AE:EM=3:1$, tai $EM:AB=1:4$ Taigi $S_{DAE}=3S_{DEM}$,

$S_{DEM}=\frac{1}{4}S_{DAM}=\frac{1}{8}S_{ACD}=$

$=\frac{1}{8}S_{ABD}$, nes AM – trikampio DAC pusiaukraštinė, o $S_{ACD}=$ $=S_{ABD}$ (bendras pagrindas AD ir lygios aukštinės). Taigi:



2 pav.

$$S_{DAE} = \frac{1}{8}(S_{AEB} + S_{DAE}) = \frac{1}{8}(15 + 3S_{DEM}) \Rightarrow S_{DEM} = 3 \text{ (cm}^2\text{)}.$$

Trikampių ABE ir EBM pagrindai yra vienoje tiesėje, o aukštinė bendra, todėl $S_{EBM} = \frac{1}{3}S_{ABC} = 5$ (cm^2). Taigi $S_{DBM} = S_{DEM} + S_{EBM} = 3 + 5 = 8$ (cm^2). $S_{DBC} = 2S_{DBM} = 16$ (cm^2) (BM – trikampio DBC vidurinė linija), o $S_{DAE} = 3 \cdot 3 = 9$ (cm^2). Vadinasi,

$S_{ABCD} = S_{ABE} + S_{DBC} + S_{ADM} = 15 + 16 + 9 = 40$ (cm^2).

Ats.: 40 cm^2.

2 būdas. Kadangi $S_{ABE} = 15$ cm^2, o $S_{EBM} = \frac{1}{3}S_{ABE} = \frac{1}{3} \cdot 15 = 5$ (cm^2), tai $S_{ABM} = S_{ABE} + \frac{1}{3}S_{ABE} = \frac{1}{3} \cdot 15 = 5$ (cm^2) ir $S_{ABM} = S_{ABE} + S_{EBM} = 15 + 5 = 20$ (cm^2). Turime $S_{AMD} = \frac{1}{2}AD \cdot h_1$, $S_{BMC} = \frac{1}{2}BC \cdot h_2$; todėl $S_{ABD} + S_{BMC} = \frac{1}{2}(AD + BC)(h_1 + h_2) = \frac{1}{2}S_{ABCD}$, nes $(h_1 + h_2)$ – trapecijos aukštinė. Vadinasi, $S_{AEB} = \frac{1}{2}S_{ABCD}$. Iš čia $S_{ABCD} = 2S_{AEB} = 2 \cdot 20 = 40$ (cm^2).

Ats.: 40 cm^2.

10. Pagrindo kraštinę pažymėkime x, kitą – $(12 - x)$, o šoninę briauną – $(18 - x)$. Stačiakampio gretasienio įstrižainę pažymėję l, gauname, kad

$$l^2 = x^2 + (12 - x)^2 + (18 - x^2) = 3x^2 - 60x + 468.$$

Ši funkcija (taip pat ir l) mažiausią reikšmę įgyja su $x = 10$. Tuomet $V = 10 \cdot 2 \cdot 8 = 160$ cm^3.

Ats.: 160 cm^3.

PIRMOSIOS UŽDUOTIES SPRENDIMAS

1. Kadangi

$$2004 = 1\cdot 2^{10} + 1\cdot 2^9 + 1\cdot 2^8 + 1\cdot 2^7 + 1\cdot 2^6 + 0\cdot 2^5 + 1\cdot 2^4 + \\ + 0\cdot 2^3 + 1\cdot 2^2 + 0\cdot 2^1 + 0\cdot 2^0,$$

$$12 = 1\cdot 2^3 + 1\cdot 2^2 + 0\cdot 2^1 + 0\cdot 2^0,$$

$$10 = 1\cdot 2^3 + 0\cdot 2^2 + 1\cdot 2^1 + 0\cdot 2^0,$$

tai $(2004.12.10)_{(10)} = (11111010100.1100.1010)_{(2)}$.

Ats.: 11111010100.1100.1010.

2. 1) $-86350 = 284\cdot(-305) + 270 \Rightarrow q = -305, r = 270$;

2) $7342 = (-46)\cdot(-159) + 28 \Rightarrow q = -159, r = 28$;

3) $-75840 = (-3215)\cdot 24 + 1320 \Rightarrow q = 24, r = 1320$.

Ats.: 1) –305, 270; 2) –159, 28; 3) 24, 1320.

3. Naudodamiesi lyginių savybėmis gauname:

$$14 \equiv 0 (\mathrm{mod}\, 7) \Rightarrow 14^8 \equiv 0 (\mathrm{mod}\, 7);$$

$$15 \equiv 1 (\mathrm{mod}\, 7) \Rightarrow 15^{10} \equiv 1 (\mathrm{mod}\, 7);$$

$$12 \equiv 5 (\mathrm{mod}\, 7) \Rightarrow 12^{13} \equiv 5^{13} (\mathrm{mod}\, 7);$$

$$5^2 \equiv 4 (\mathrm{mod}\, 7) \Rightarrow 5^4 \equiv 4^2 \equiv 2 (\mathrm{mod}\, 7) \Rightarrow 5^{12} \equiv 8 \equiv 1 (\mathrm{mod}\, 7) \Rightarrow \\ \Rightarrow 5^{13} \equiv 5 (\mathrm{mod}\, 7);$$

Taigi $12^{13} + 15^{10} - 14^8 \equiv 5 + 1 - 0 \equiv 6 (\mathrm{mod}\, 7)$.

Ats.: 6.

4. Paskutinysis natūraliojo skaičiaus skaitmuo yra dalybos iš 10 liekana. Vadinasi, turime rasti skaičių x, $0 \le x < 10$, su kuriuo

$$3^{2004} + 7^{2005} \equiv x (\mathrm{mod}\, 10):$$

$$3^3 \equiv 7 (\mathrm{mod}\, 10) \Rightarrow 3^4 \equiv 1 (\mathrm{mod}\, 10) \Rightarrow 3^{2004} = (3^4)^{501} \equiv 1 (\mathrm{mod}\, 10);$$

$$7^2 \equiv 9(\mathrm{mod}\,10) \Rightarrow 7^3 \equiv 3(\mathrm{mod}\,10) \Rightarrow 7^4 \equiv 1(\mathrm{mod}\,10) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 7^{2005} = (7^4)^{501} \cdot 7 \equiv 1 \cdot 7 \equiv 7(\mathrm{mod}\,10).$$

Taigi $3^{2004} + 7^{2005} \equiv 8(\mathrm{mod}\,10)$.

Ats.: 8.

5. *Dalumo iš 11 požymis.* Tarkime, skaičius n užrašytas dešimtaine sistema: $n = \overline{a_k a_{k-1} ... a_3 a_2 a_1 a_0}$. Jeigu skaičius

$$S = a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + ... + (-1)^k a_k$$

dalijasi iš 11, tai ir skaičius n dalijasi iš 11. Ir atvirkščiai: jeigu skaičius n dalijasi iš 11, tai ir skaičius

$$S = a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + ... + (-1)^k a_k$$

dalijasi iš 11.

Įrodymas.

$$n = \overline{a_k a_{k-1} ... a_3 a_2 a_1 a_0} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow n = a_k \cdot 10^k + a_{k-1} \cdot 10^{k-1} + ... + a_3 \cdot 10^3 + a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10^1 +$$
$$+ a_0 \cdot 10^0.$$

Kadangi

$$10^0 = 1,\ 10^1 \equiv -1(\mathrm{mod}\,11),\ 10^2 \equiv 1(\mathrm{mod}\,11),\ 10^3 \equiv -1(\mathrm{mod}\,11), ...,$$

tai pagal lyginių daugybos iš skaičiaus ir lyginių sudėties savybes skaičius n ir S dalijant iš 11 gaunama ta pati liekana. Vadinasi, jei bet kuris vienas iš jų dalijasi iš 11, tai ir kitas dalijasi iš 11.

Pastaba. Dalumo iš 11 požymiais galima laikyti ir tokius teiginius.

Skaičius $n = 10a + b$ *dalijasi iš* 11 *tik tuomet, kai skaičius* $a + 10b$ *dalijasi iš* 11.

Tuo įsitikiname iš lygybės $(10a + b) + (a + 10b) = 11(a + b)$ pagal antrąją dalumo savybę.

Skaičius $n = 10a + b$ *dalijasi iš* 11 *tik tuomet, kai skaičius* $a - b$ *dalijasi iš* 11.

Šio požymio teisingumas išplaukia iš lygybės $(10a + b) + (a - b) = 11a$ ir antrosios dalumo savybės.

6. Galioja lygybė $(10a+b)+13(a+7b)=23(a+4b)$. Jeigu $a+4b$ dalijasi iš 13, tai pagal antrąją sveikųjų skaičių dalumo savybę iš 13 dalijasi ir $(10a+b)$. Ir atvirkščiai – jeigu $(10a+b)$ dalijasi iš 13, tai ir $a+4b$ dalijasi iš 13.

7. Užrašykime duotųjų skaičių skaidinius:
$2132=2^2\cdot13\cdot41$, $1599=3\cdot13\cdot41$, $9061=13\cdot17\cdot41$. Todėl
$DBD(2132,1599,9061)=13\cdot41=533$,
$MBK(2132,1599,9061)=2^2\cdot3\cdot13\cdot17\cdot41=108732$.
Ats.: 533, 108732.

8. Iš pradžių įrodykime teiginį: *jeigu skaičiai m ir n yra tarpusavyje pirminiai, tai skaičiai* $(m+n)$ *ir* (m^2+mn+n^2) *taip pat yra tarpusavyje pirminiai.*

Tarkime priešingai – skaičiai $(m+n)$ *ir* (m^2+mn+n^2) nėra tarpusavyje pirminiai. Tuomet egzistuoja šių skaičių bendras daliklis $q\neq1$. Kadangi $m^2+mn+n^2=(m+n)^2-mn$, tai pagal antrą dalumo savybę iš q turėtų dalytis ir mn. Tačiau m ir n yra tarpusavyje pirminiai, todėl iš q dalysis vienas iš jų. Bet tuomet iš q turėtų dalytis ir kitas, nes jų suma dalijasi iš q. Taip gauname prieštaravimą. Vadinasi, skaičiai $(m+n)$ *ir* (m^2+mn+n^2) yra tarpusavyje pirminiai.

Pagal įrodytąjį teiginį visas tarpusavyje pirminių skaičių poras (m,n), su kuriomis galioja uždavinio lygybė, gausime išsprendę lygčių sistemą $\begin{cases} m+n=3, \\ m^2+mn+n^2=13. \end{cases}$ Jos sprendiniai yra dvi skaičių poros: $(4;-1)$, $(-1;4)$.

Galimas ir kitoks šio uždavinio sprendimas. Kad galiotų lygybė $\dfrac{m+n}{m^2+m\cdot n+n^2}=\dfrac{3}{13}$, turi egzistuoti nelygus nuliui sveikasis skaičius k, su kuriuo $m+n=3k$ ir $m^2+mn+n^2=13k$. Pakėlę

pirmąją lygybę kvadratu ir iš jos atėmę antrąją, gausime $mn = 9k^2 - 13k$. Iš čia $m = \dfrac{9k^2 - 13k}{n}$. Įrašę tai į pirmąją lygybę, turėsime: $\dfrac{9k^2 - 13k}{n} + n = 3k$

$$\Rightarrow n^2 - 3kn + 9k^2 - 13k = 0 \Rightarrow n = \frac{3k \pm \sqrt{52k - 27k^2}}{2}.$$

Skaičius n yra sveikasis tik tada, kai $k = 1$. Tuomet $n = 4$ arba $n = -1$. Skaičiaus m reikšmė atitinkamai bus $m = -1$ arba $m = 4$.

Taigi reikalavimas, kad skaičiai m ir n būtų tarpusavyje pirminiai, netgi nebūtinas.

Ats.: $(4;-1)$, $(-1;4)$.

9. Skaičiai n gali būti tik tokio pavidalo: $n = 6q + r$, $r = 0, 1, 2, 3, 4, 5$. Vadinasi, teiginys bus teisingas, jeigu jis galios su visomis galimomis skaičiaus n dalybos iš 6 liekanomis. Išnagrinėsime kiekvieną atvejį atskirai.

1) $r = 0$; tuomet $n(n^2 - 7) = 6q(36q^2 - 7)$ – šis skaičius dalijasi iš 6.

2) $r = 1$; tuomet

$n(n^2 - 7) = (6q + 1)(36q^2 + 12q - 6) = 6(6q + 1)(6q^2 + 2q - 1)$ – šis skaičius dalijasi iš 6.

3) $r = 2$

$\Rightarrow n(n^2 - 7) = (6q + 2)(36q^2 + 24q - 3) = 6(3q + 1)(12q^2 + 8q - 1)$ – dalijasi iš 6.

4) $r = 3 \Rightarrow n(n^2 - 7) = (6q + 3)(36q^2 + 36q - 2) =$

$= 6(2q + 1)(18q^2 + 18q - 1)$ – dalijasi iš 6.

5) $r = 4 \Rightarrow n(n^2 - 7) = (6q + 4)(36q^2 + 48q - 9) =$

$= 6(3q + 2)(12q^2 + 16q - 3)$ – dalijasi iš 6.

6) $r = 5 \Rightarrow n(n^2 - 7) = (6q + 5)(36q^2 + 60q - 18) =$

$= 6(6q+5)(6q^2+10q-3)$ – dalijasi iš 6.

Taigi skaičius $n(n^2-7)$ su visais natūraliaisiais n dalijasi iš 6.

10. Skaičiai x gali būti tik tokio pavidalo: $x = 7q + r$, $r = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$. Vienas iš šio lyginio sprendimo būdų – patikrinti visus galimus atvejus ir atrinkti tinkamus:

1) $r = 0 \Rightarrow x \equiv 0 (\mathrm{mod}\, 7) \Rightarrow 4x \equiv 0 (\mathrm{mod}\, 7)$ – netinka;

2) $r = 1 \Rightarrow x \equiv 1 (\mathrm{mod}\, 7) \Rightarrow 4x \equiv 4 (\mathrm{mod}\, 7)$ – netinka;

3) $r = 2 \Rightarrow x \equiv 2 (\mathrm{mod}\, 7) \Rightarrow 4x \equiv 1 (\mathrm{mod}\, 7)$ – netinka.

4) $r = 3 \Rightarrow x \equiv 3 (\mathrm{mod}\, 7) \Rightarrow 4x \equiv 5 (\mathrm{mod}\, 7)$ – tinka, t. y. visi sveikieji skaičiai pavidalo $7q + 3$ yra lyginio sprendiniai;

5) $r = 4 \Rightarrow x \equiv 4 (\mathrm{mod}\, 7) \Rightarrow 4x \equiv 2 (\mathrm{mod}\, 7)$ – netinka;

6) $r = 5 \Rightarrow x \equiv 5 (\mathrm{mod}\, 7) \Rightarrow 4x \equiv 6 (\mathrm{mod}\, 7)$ – netinka;

7) $r = 6 \Rightarrow x \equiv 6 (\mathrm{mod}\, 7) \Rightarrow 4x \equiv 3 (\mathrm{mod}\, 7)$ – netinka.

Lyginio $4x \equiv 5 (\mathrm{mod}\, 7)$ visus sprendinius galima rasti ir kitaip (remiantis lyginių savybėmis):

$4x \equiv 5 (\mathrm{mod}\, 7) \Leftrightarrow 4x \equiv 12 (\mathrm{mod}\, 7) \Leftrightarrow 4x - 12 \equiv 0 (\mathrm{mod}\, 7) \Leftrightarrow$
$4(x-3) \equiv 0 (\mathrm{mod}\, 7) \Leftrightarrow x - 3 \equiv 0 (\mathrm{mod}\, 7) \Leftrightarrow x \equiv 3 (\mathrm{mod}\, 7) \Leftrightarrow$
$x = 7q + 3, q \in Z$.

Ats.: $\{7q + 3 : q \in Z\}$.

ANTROSIOS UŽDUOTIES SPRENDIMAS

1. Jei lygiašonio trikampio pagrindas 5 cm ilgesnis už šoninę kraštinę, tai, pažymėję šoninės kraštinės ilgį x, gausime tokią lygtį $x + x + x + 5 = 20$, t.y. $x = 5$. Tuomet trikampio šoninių kraštinių ilgiai 5 cm, o pagrindo – 10 cm. Bet nėra tokio trikampio, kurio kraštinių ilgiai 5, 5 ir 10 (negalioja trikampio nelygybė). Jei šoninė kraštinė 5 cm ilgesnė už pagrindą, tai jos ilgį pažymėję x, gauname lygtį $x + x + x - 5 = 20$, t. y. $x = \frac{25}{3}$. Tuomet šoninių

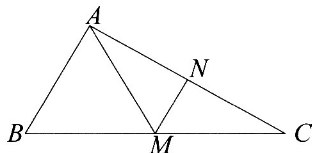
kraštinių ilgiai $\frac{25}{3}$ cm, o pagrindo ilgis $\frac{10}{3}$ cm. Trikampis, kurio kraštinės lygios $\frac{10}{3}$, $\frac{25}{3}$ ir $\frac{25}{3}$ egzistuoja.

Ats.: $\frac{10}{3}, \frac{25}{3}, \frac{25}{3}$.

2. Nubrėžkime trikampio ABC vidurio liniją MN, lygiagrečią su kraštine AB (1 pav.), ir trikampiui AMN taikome trikampio nelygybę: $AM < MN + AN$.

Kadangi $MN = \frac{1}{2}AB$, $AN = \frac{1}{2}AC$,

tai $AM < \frac{1}{2}(AB + AC)$.



1 pav.

3. Sakykime, kad trikampio ABC kraštinių BC, AC, AB ilgiai a, b, c, o aukštinės $h_a = 12$, $h_b = 20$. Jei S – trikampio ABC plotas, tai $a = \frac{2S}{h_a}$, $b = \frac{2S}{h_b}$, $c = \frac{2S}{h_c}$. Pagal 1 išvadą $c > |a - b|$, t. y. $\frac{2S}{h_c} > \left|\frac{2S}{h_a} - \frac{2S}{h_b}\right|$ arba $\frac{1}{h_c} > \left|\frac{1}{12} - \frac{1}{20}\right| = \frac{1}{30}$. Iš čia $h_c < 30$.

Ats.: negali.

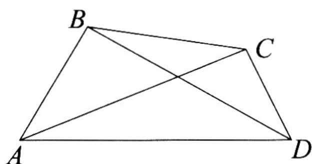
4. Kadangi stačiajame trikampyje $c^2 = a^2 + b^2$, tai $c^3 = c^2 \cdot c = (a^2 + b^2) \cdot c = a^2c + b^2c$. Trikampio statinis trumpesnis už įžambinę, todėl $c > a$ ir $c > b$. Taigi $c^3 = a^2c + b^2c > a^2 \cdot a + b^2 \cdot b = a^3 + b^3$.

Ats.: $c^3 > a^3 + b^3$.

Pastaba. Stačiajame trikampyje su bet kokiu natūraliuoju $n > 2$ teisinga nelygybė $c^n > a^n + b^n$. Įrodymas analogiškas atvejui $n = 3$:

$c^2 = a^2 + b^2$, $c^n = (a^2 + b^2)c^{n-2} = a^2 \cdot c^{n-2} + b^2 \cdot c^{n-2}$. Kadangi $c > a$, $c > b$, tai $c^{n-2} > a^{n-2}$, $c^{n-2} > b^{n-2}$ ir $c^n > a^n + b^n$.

5. Keturkampiui $ABCD$ (2 pav.) taikome 1 pavyzdyje įrodytą nelygybę $AB + CD < AC + BD$. Sudedame ją su uždavinio sąlygoje pateikta nelygybe ir gauname, kad $2AB + CD + BD < 2AC + BD + CD$ arba $2AB < 2AC$, t. y. $AB < AC$.

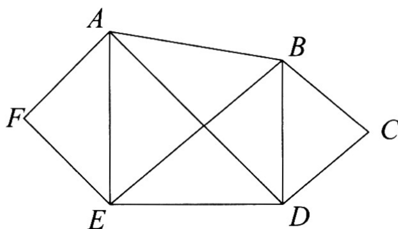


2 pav.

6. Sakykime, kad $ABCDEF$ – šešiakampis, kurio visos įstrižainės lygios (3 pav.). Keturkampiui $ABDE$ taikome 1 pavyzdyje įrodytą nelygybę:

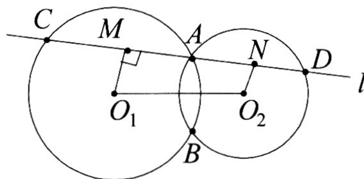
$AE + BD < AD + EB$.

Bet visos į šią nelygybę įeinančios atkarpos yra šešiakampio įstrižainės, todėl jos yra lygios ir minėtoji nelygybė yra negalima. Prieštaravimas įrodo, kad šešiakampių, kurių visos įstrižainės yra lygios, nėra.



3 pav.

7. Sakykime, kad apskritimai, kurių centrai yra taškai O_1 ir O_2, kertasi taškuose A ir B (4 pav.). Per tašką A nubrėžta tiesė l kerta juos taškuose C ir D. Nubrėžkime statmenis $O_1M \perp l$ ir $O_2N \perp l$. Akivaizdu, kad $CM = MA$ ir $AN = ND$. Kadangi MN yra statmuo tiesei O_1M, o O_1O_2 – pasviroji, tai $O_1O_2 \geq MN$, t. y. $O_1O_2 \geq \frac{1}{2}CD$ ir $CD \leq 2O_1O_2$. Lygybė $CD = 2O_1O_2$ teisinga tada, kai teisinga lygybė $O_1O_2 = MN$, t. y., kai O_1O_2 irgi yra statmuo



4 pav.

tiesei O_1M. O tai ir reiškia, kad styga CD didžiausią reikšmę $2O_1O_2$ įgyja tada, kai tiesės O_1O_2 ir l lygiagrečios.

8. Jei duotojo trikampio kraštinių ilgiai a, b, c, tai pagal Herono formulę $S^2 = p(p-a)(p-b)(p-c)$. Kita vertus, trikampio plotui yra teisinga lygybė $S = pr$, čia r – įbrėžto apskritimo spindulys. Iš čia $r^2 = \frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}$. Bet pagal aritmetinio ir geometrinio vidurkių nelygybę

$$\frac{(p-a)+(p-b)+(p-c)}{3} \geq \sqrt[3]{(p-a)(p-b)(p-c)},$$

t. y.

$$(p-a)(p-b)(p-c) \leq \frac{1}{27}((p-a)+(p-b)+(p-c))^3 = \left(\frac{p}{3}\right)^3.$$

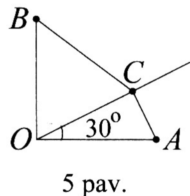
Taigi $r^2 \leq \frac{p^2}{27}$, o lygybė $r^2 = \frac{p^2}{27}$ yra teisinga tik kai $p-a = p-b = p-c$, t. y. kai $a = b = c$.

Ats.: $r = \frac{p}{3\sqrt{3}}$, kai trikampis lygiakraštis.

9. Pagal aritmetinio ir geometrinio vidurkio nelygybę

$$\sqrt{(p-b)(p-c)} \leq \frac{p-b+p-c}{2} = \frac{2p-b-c}{2} = \frac{a}{2}.$$

10. Nubrėžkime statų kampą O ir jo kraštinėse atidėkime atkarpas $OA = OB = 1$ (žr. 5 pav.). Iš taško O tarp kampo kraštinių išveskime spindulį, sudarantį su kampo kraštine OA $30°$ kampą ir jame atidėkime atkarpą $OC = x$. Tuomet pagal kosinusų teoremą



5 pav.

$$AB = \sqrt{x^2+1-x\sqrt{3}}, \qquad BC = \sqrt{x^2+1-x}.$$

Taigi mažiausia duotojo reiškinio reikšmė įgyjama, kai taškas C yra

atkarpoje AB ir lygi trikampio AOB įžambinei, t. y. $\sqrt{2}$.

Ats.: $\sqrt{2}$.

TREČIOSIOS UŽDUOTIES SPRENDIMAS

1. Nagrinėkime „blogiausią“ variantą: atsitiktinai ištraukėme visas korteles, ant kurių parašyti skaičiai 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 ir po devynias korteles, ant kurių parašyti skaičiai 10, 11, 12, … , 50. Tokių kortelių yra: $1+2+3+4+5+6+7+8+9+9\cdot 41=414$. Tarp jų nėra dešimties kortelių su vienodais skaičiais. Akivaizdu, kad ir kokią ištrauktume dar vieną kortelę, tarp visų ištrauktųjų bus 10 kortelių su vienodais skaičiais. Vadinasi, mažiausiai reikia ištraukti 415 kortelių, kad tarp jų būtinai būtų bent 10 kortelių su vienodais skaičiais.

Ats.: 415.

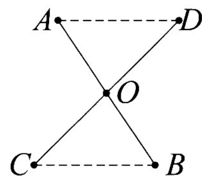
2. Akivaizdu, kad $x=0$, $y=0$, $z=0$, t. y. (0; 0; 0) yra lygties sprendinys. Įrodysime, kad daugiau sveikųjų sprendinių duotoji lygtis neturi. Tarkime priešingai. Sakykime, $(x; y; z)$ yra vienas iš sveikųjų sprendinių, skirtingas nuo (0; 0; 0) ir kurio suma $|x|+|y|+|z|$ yra mažiausia. Iš lygties pavidalo matyti, kad x yra dalus iš 3, t. y. $x=3x_1$. Šią x išraišką įrašę į duotąją lygtį ir ją suprastinę iš 3, gauname tokią lygtį: $9x_1^3-y^3-3z^3=0$. Iš čia matyti, kad y yra dalus iš 3. Analogiškai gauname, kad ir z dalus iš 3, t. y. $y=3y_1$ ir $z=3z_1$. Nesunku įsitikinti, kad $x_1^3-3y_1^3-9z_1^3=0$, t. y. $(x_1; y_1; z_1)$ yra duotosios lygties sprendinys; be to,

$$|x_1|+|y_1|+|z_1|=\left|\frac{x}{3}\right|+\left|\frac{y}{3}\right|+\left|\frac{z}{3}\right|<|x|+|y|+|z|.$$

Taigi $(x_1; y_1; z_1)$ yra duotosios lygties sprendinys, kurio suma $|x_1|+|y_1|+|z_1|$ yra mažesnė už $|x|+|y|+|z|$. Prieštara. Vadinasi, duotoji lygtis sveikųjų sprendinių, skirtingų nuo (0; 0; 0), neturi.

Ats.: (0; 0; 0).

3. Dvidešimt taškų poromis dešimčia atkarpų galima sujungti daugeliu (baigtinis skaičius!) būdų. Iš šių skirtingų sujungimo būdų išsirinkime tą sujungimą, kurio atkarpų ilgių suma yra mažiausia. Įrodysime, kad šio sujungimo atkarpos nesikerta. Tarkime priešingai. Sakykime, kad šio sujungimo dvi atkarpos AB ir CD susikerta taške O. (1 pav.) Tada



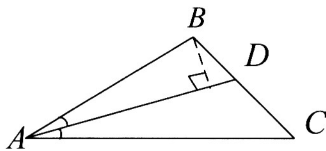
1 pav.

$$AB + CD = AO + OB + CO + OD = \\ = (AO + OD) + (CO + OB) > AD + CB\,.$$

Pasirinktajame sujungime atkarpas AB ir CD pakeitę atkarpomis AD ir CB, gausime 10 atkarpų, jungiančių poromis duotuosius 20 taškų, rinkinį, kurio atkarpų ilgių suma yra mažesnė už pasirinktojo atkarpų rinkinio atkarpų ilgių sumą. Prieštara. Taigi pasirinktos 10 atkarpų, poromis jungiančių 20 duotųjų taškų ir kurių ilgių suma yra mažiausia, tarpusavyje nesikerta.

Ats.: taip.

4. Sakykime, kad kampas A yra mažiausias trikampio ABC kampas, o AD – šio kampo pusiaukampinė. Tada $\angle BAC \le 60^\circ$.



2 pav.

Vienas iš kraštinių AB ar AC ilgis neviršija $\dfrac{AD}{\cos\frac{A}{2}}$ (2 pav. $AB < \dfrac{AD}{\cos\frac{A}{2}}$; jeigu trikampis BAC lygiašonis, tai $AB = AC = \dfrac{AD}{\cos\frac{A}{2}}$). Kadangi $\dfrac{\angle A}{2} \le 30^\circ$, tai $\cos\dfrac{A}{2} \ge \cos 30^\circ$.

Vadinasi, $AB \le \dfrac{AD}{\cos\frac{A}{2}} \le \dfrac{AD}{\cos 30^\circ} \le \dfrac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \dfrac{2}{\sqrt{3}}$ ir

$$S_{ABC}=\frac{h_C\cdot AB}{2}\le\frac{l_C\cdot AB}{2}\le\frac{1\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}}{2}=\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

5. Sakykime, kad keliautojas grįžo į miestą A po n etapų ($n\ge 3$) ir nuėjo atitinkamai atstumus $d_1, d_2, ..., d_n$. Pastebėsime, kad $d_2 > d_1$, nes keliautojas iš miesto B eina į miestą C, o ne į miestą A. Pastebėsime taip pat, kad kiekvieną dieną keliautojas negali nueiti mažesnio atstumo negu nuėjo prieš tai, t. y. $d_{i+1}\ge d_i$, $i=1, 2, ..., n-1$. Vadinasi, $d_n > d_1$. Bet taip būti negali, nes tai reikštų, kad miestas B nėra toliausiai nutolęs nuo miesto A. Prieštara. Taigi keleivis negali grįžti į miestą A. Nuo kurios nors dienos keleivis keliaus tik pirmyn ir atgal tarp dviejų miestų.

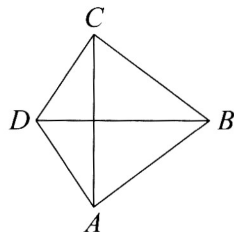
Ats.: ne.

6. Sakykime, kad n_0 – didžiausias iš visų 64 skaičių, įrašytų į 8×8 kvadrato langelius. Jeigu tokių skaičių yra keli, tai pasirenkame bet kurį. Skaičiaus n_0 – kaimynus pažymėkime $n_1, n_2, ..., n_k$, kurie yra ne didesni už n_0 (k lygus 3, 5 ar 8, priklausomai nuo langelio, į kurį įrašytas skaičius n_0, padėties). Kadangi $n_0\ge n_1$, $n_0\ge n_2$, ..., $n_0\ge n_k$ ir pagal sąlygą $kn_0\le n_1+n_2+...+n_k$, tai iš čia išplaukia, kad $n_0=n_1=n_2=...=n_k$. Analogiškai įrodome, kad visi skaičių $n_1, n_2, ..., n_k$ kaimynai lygūs n_0. Taip nuosekliai įrodome, kad visi 64 skaičiai yra lygūs n_0.

7. Sakykime, kad egzistuoja toks briaunainis, kurio visos sienos turi skirtingą kraštinių skaičių. Tada viena siena turi daugiausia kraštinių. Tegul tų kraštinių skaičius yra m. Likusių sienų kraštinių skaičius gali būti $m-1$, $m-2$, $m-3$, ..., 5, 4, 3 (mažiau kaip 3 kraštinės negali būti). Kadangi visų sienų kraštinių skaičiai yra skirtingi, tai šių likusių sienų negali būti daugiau negu $m-3$. Bet siena su m kraštinėmis turi liestis su m kitų sienų – su kiekviena siena prie kiekvienos kraštinės. Tačiau yra ne daugiau kaip $m-3$ sienos. Gavome prieštarą. Vadinasi, tokio briaunainio nėra.

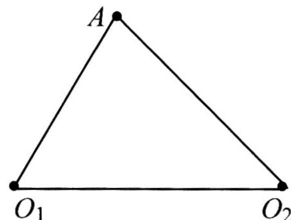
Ats.: ne.

8. Keturkampis $ABCD$ – iškilasis ir $AC = BD = 1$ cm. Sakykime, kampas B yra mažiausias. Tada $\angle B \leq 90^\circ$. Vadinasi, $AB^2 + BC^2 \geq AC^2 = 1$. Iš čia išplaukia, kad $AB^2 \geq \frac{1}{2}$ arba $BC^2 \geq \frac{1}{2}$, t. y. $AB \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$ cm arba $BC \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$ (cm).



3 pav.

9. Iš monetų, esančių ant stalo, išsirinkime bet kurią 2 ct monetą. Sakykime, jos centras yra A ir ji liečia monetas, kurių centrai $O_1, O_2, ..., O_n$. Nagrinėkime trikampį AO_1O_2. Šiame trikampyje kraštinė O_1O_2 ne trumpesnė už kitas dvi kraštines AO_1 ir AO_2. Vadinasi, $\angle O_1AO_2 \geq 60^\circ$. Analogiškai įrodome, kad



4 pav.

$\angle O_2AO_3 \geq 60^\circ$, ..., $\angle O_nAO_1 \geq 60^\circ$. Kadangi

$\angle O_1AO_2 + \angle O_2AO_3 + ... + \angle O_nAO_1 = 360^\circ$, tai $n \cdot 60^\circ \leq 360^\circ$.

Iš čia išplaukia, kad $n \leq 6$. Taigi pasirinktą monetą gali liesti daugiausia 6 monetos, esančios ant stalo.

10. Tarp plokštumoje pažymėtų taškų rasime du taškus, atstumas tarp kurių yra didžiausias. Sakykime, tokie taškai yra A ir B. Nubrėžkime du vienetinius skritulius, kurių centrai yra taškas A ir taškas B. Tada bet kurio iš 2003 plokštumoje pažymėtų taškų atstumas iki taško A arba taško B yra mažesnis už 1. Todėl tie taškai yra arba vieno, arba kito nubrėžto skritulio viduje. Taigi visi 2005 taškai yra nubrėžtųjų skritulių viduje. Akivaizdu, kad viename skritulyje yra ne mažiau kaip 1003 taškai.

KETVIRTOSIOS UŽDUOTIES SPRENDIMAS

1. Kai $n=1$, lygybė galioja. Tarkime, kad ji galioja ir su $n=k$ $(k>1)$, t. y.

$$1^2+3^2+5^2+\ldots+(2k-1)^2=\frac{k(2k-1)(2k+1)}{3}.$$

Remdamiesi šia prielaida, apskaičiuokime sumą $1^2+3^2+5^2+\ldots+(2n-1)^2$ su $n=k+1$. Gausime

$$1^2+3^2+5^2+\ldots+(2k+1)^2=\frac{k(2k-1)(2k+1)}{3}+(2k+1)^2=$$

$$=\frac{(2k+1)(k(2k-1)+3(2k+1))}{3}=\frac{(2k+1)(2k^2+5k+3)}{3}=$$

$$=\frac{(2k+1)(k+1)(2k+3))}{3}.$$

Šis rezultatas sutampa su $\frac{n(2n-1)(2n+1)}{3}$, kai $n=k+1$.

Pagal matematinės indukcijos principą tiriamoji lygybė galioja su visais natūraliaisiais skaičiais n.

2. Iš pradžių panagrinėkime sumos dėmenis $\frac{1}{(4k-3)\cdot(4k+1)}$, $k=1, 2, \ldots, n$:

$$\frac{1}{(4k-3)(4k+1)}=\frac{(1+4k)-(4k-3)-3}{(4k-3)(4k+1)};$$

$$\frac{1}{(4k-3)(4k+1)}=\frac{1}{4k-3}-\frac{1}{4k+1}-\frac{3}{(4k-3)(4k+1)}.$$

Iš čia gauname

$$\frac{4}{(4k-3)(4k+1)}=\frac{1}{4k-3}-\frac{1}{4k+1},$$

todėl

$$\frac{1}{(4k-3)(4k+1)}=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{4k-3}-\frac{1}{4k+1}\right);\ k=1, 2, \ldots, n.$$

Taikydami šią išraišką, pertvarkykime sumą

$$\frac{1}{1\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 9}+\frac{1}{9\cdot 13}+\ldots+\frac{1}{(4n-3)\cdot(4n+1)}.$$

Gausime

$$\frac{1}{1\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 9}+\frac{1}{9\cdot 13}+\ldots+\frac{1}{(4n-3)\cdot(4n+1)}=$$

$$=\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{5}\right)+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{9}\right)+\ldots+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{4n-3}-\frac{1}{4n+1}\right)=$$

$$=\frac{1}{4}\left(\left(1-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{9}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{4n-3}-\frac{1}{4n+1}\right)\right)=$$

$$=\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{4n+1}\right)=\frac{n}{4n+1}.$$

Taigi turime tokią formulę:

$$\frac{1}{1\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 9}+\ldots+\frac{1}{(4n-3)\cdot(4n+1)}=\frac{n}{4n+1}.$$

Remdamiesi matematinės indukcijos principu, įrodykime, kad ji galioja su visais natūraliaisiais skaičiais n.

Kai $n=1$, ji tikrai galioja. Tarę, kad

$$\frac{1}{1\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 9}+\ldots+\frac{1}{(4k-3)(4k+1)}=\frac{k}{4k+1},$$

įrodykime, kad lygybė galioja ir su $n=k+1$:

$$\frac{1}{1\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 9}+\ldots+\frac{1}{(4k-3)(4k+1)}+\frac{1}{(4k+1)(4k+5)}=$$

$$=\frac{k}{4k+1}+\frac{1}{(4k+1)(4k+5)}=\frac{1}{(4k+1)}\cdot\left(k+\frac{1}{4k+5}\right)=$$

$$=\frac{1}{(4k+1)}\cdot\frac{4k^2+5k+1}{(4k+5)}=\frac{(k+1)(4k+1)}{(4k+1)(4k+5)}=\frac{k+1}{4k+5}.$$

Ats.: $\frac{n}{n+1}$.

3. Taikykime matematinės indukcijos metodą.

Kai $n=1$, tai $14n^3+9n^2+n=24$; taigi skaičius $14n^3+9n^2+n$ dalijasi iš 6.

Tarę, kad $14n^3+9n^2+n$ dalijasi iš 6 su natūraliuoju skaičiumi $n=k$, skaičių $14k^3+9k^2+k$ užrašykime taip:

$$14k^3+9k^2+k=6m;$$

čia m yra kuris nors natūralusis skaičius. Tada

$$14(k+1)^3+9(k+1)^2+k+1=(14k^3+9k^2+k)+$$
$$+(42k^2+60k+24)=6m+6(7k^2+10k+4)=$$
$$=6(m+7k^2+10k+4).$$

Taigi skaičius $14(k+1)^3+9(k+1)^2+k+1$ dalijasi iš 6.

Pagal matematinės indukcijos principą skaičius $14n^3+9n^2+n$ dalijasi iš n bet kuriuo natūraliuoju skaičiumi n.

4. Taikykime matematinės indukcijos metodą.

Kai $n=1$, reiškinio $11^{n+1}+12^{2n-1}$ reikšmė yra lygi 133, taigi skaičius $11^{n+1}+12^{2n-1}$ dalijasi iš 133, kai $n=1$.

Tarkime, kad $11^{n+1}+12^{2n-1}$ dalijasi iš 133, kai $n=k$, t. y. $11^{k+1}+12^{2k-1}=133m$; čia m – kuris nors natūralusis skaičius. Nagrinėkime reiškinį $11^{n+1}+12^{2n-1}$ su $n=k+1$:

$$11^{k+2}+12^{2k+1}=(11\cdot 11^{k+1}+11\cdot 12^{2k-1})+(12^{2k+1}-11\cdot 12^{2k-1})=$$
$$=11\cdot(11^{k+1}+12^{2k-1})+12^{2k-1}\cdot(12^2-11)=$$
$$=11\cdot 133m+133\cdot 12^{2k-1}=133\cdot(11m+12^{2k-1}).$$

Išvada aiški – skaičius $11^{n+1}+12^{2n-1}$ dalijasi iš 133, kai $n=k+1$. Pagal matematinės indukcijos principą skaičius $11^{n+1}+12^{2n-1}$ dalijasi iš 133 su visais natūraliaisiais skaičiais n.

5. Iš pradžių pertvarkykime reiškinį $\frac{n}{3}+\frac{n^2}{2}+\frac{n^3}{6}$. Gausime

$$\frac{n}{3}+\frac{n^2}{2}+\frac{n^3}{6}=\frac{n(n+1)(n+2)}{6}.$$

Aišku, jog sveikąjį skaičių gausime tik tada, kai $n(n+1)(n+2)$ dalijasi iš 6. Kadangi arba n, arba $n+1$ yra lyginis skaičius, tai

pakanka įrodyti, jog sandauga $n(n+1)(n+2)$ dalijasi iš 3. Šį teiginį galima įrodyti ir matematinės indukcijos metodu, ir nagrinėjant natūraliojo skaičiaus n dalybos iš 3 liekanas. Taikykime matematinės indukcijos metodą.

Kai $n=1$, sandaugos $n(n+1)(n+2)$ reikšmė yra 6; taigi $n(n+1)(n+2)$ dalijasi iš 3 su $n=1$.

Tegu $n(n+1)(n+2)$ dalijasi iš 3, kai $n=k$; vadinasi, yra toks natūralusis skaičius m, su kuriuo galioja lygybė $k(k+1)(k+2)=3m$. Nagrinėdami sandaugą su $n=k+1$, gausime:

$$k(k+1)(k+2)=(k+1)(k+2)k+(k+1)(k+2)3=$$
$$=3m+3(k+1)(k+2)=3(m+(k+1)(k+2)).$$

Matome, kad sandauga $n(n+1)(n+2)$ dalijasi iš 3 su $n=k+1$, jeigu ji dalijasi iš 3 su $n=k$. Pagal matematinės indukcijos principą sandauga $n(n+1)(n+2)$ dalijasi iš 3 su visais natūraliaisiais skaičiais n.

Galutinė išvada tokia: sandauga $n(n+1)(n+2)$ yra skaičiaus 6 kartotinis, todėl skaičius $\frac{n}{3}+\frac{n^2}{2}+\frac{n^3}{6}$ yra natūralusis su kiekvienu natūraliuoju n.

6. Tiesiogiai tikrindami matome, kad ši nelygybė negalioja su $n=1, 2, 3, 4$. Skaičius $n=5$ yra pirmas natūralusis skaičius, su kuriuo galioja nelygybė $2^n>4n+5$. Taikydami matematinės indukcijos metodą, įrodykime, kad ši nelygybė galioja su visais natūraliaisiais n, didesniais už 4.

Tarkime, kad $2^k>4k+5$, kai k yra bet kuris natūralusis skaičius, didesnis už 4. Nagrinėkime skirtumą $2^n-(4n+5)$ su $n=k+1$:

$$2^{k+1}-(4k+9)=(2^k-(4k+5))+(2^{k+1}-2^k-4)=$$

$=(2^k-(4k+5))+(2^k-4)>0$, nes $2^k-(4k+5)>0$ (pagal prielaidą) ir $2^k-4>0$ $(k\geq 5)$. Pagal matematinės indukcijos principą

nelygybė $2^n > 4n+5$ galioja su visais natūraliaisiais skaičiais, kurie yra didesni už 4.

Ats.: $n \geq 5$.

7. Kai $n=1$, gauname, jog skirtumas $(1-a)^n - \frac{1}{1+na}$ yra neigiamas skaičius:

$$(1-a) - \frac{1}{1+a} = \frac{1-a^2-1}{1+a} = -\frac{a^2}{1+a} \quad (a > 0).$$

Tarkime, kad $(1-a)^k - \frac{1}{1+ka} < 0$, kai $0 < a < 1$; čia k yra natūralusis skaičius. Nagrinėkime skirtumą $(1-a)^n - \frac{1}{1+na}$, $0 < a < 1$, kai $n = k+1$. Gausime:

$$(1-a)^{k+1} - \frac{1}{1+(k+1)a} = \left((1-a)^k - \frac{1}{1+ka}\right) +$$

$$+\left((1-a)^{k+1} - (1-a)^k\right) + \left(\frac{1}{1+ka} - \frac{1}{1+(k+1)a}\right) =$$

$$= \left((1-a)^k - \frac{1}{1+ka}\right) - a(1-a)^k - \frac{a}{(1+ka)(1+(k+1)a)} < 0,$$

kai $0 < a < 1$.

Pagal matematinės indukcijos principą nelygybė $(1-a)^n < \frac{1}{1+na}$ galioja su visais natūraliaisiais skaičiais n, kai $0 < a < 1$.

8. Aišku, kad pakanka įsitikinti, jog su visais natūraliaisiais n skirtumas

$$\Delta_n = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \ldots \cdot \frac{2n-1}{2n} - \frac{1}{\sqrt{3n+1}}$$

lygus nuliui arba yra neigiamas skaičius.

Kai $n=1$, gauname $\Delta_1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{3\cdot 1+1}} = 0$.

Taikydami matematinės indukcijos metodą, tarkime, kad $\Delta_k \le 0$ ir nagrinėkime skirtumą Δ_{k+1}. Gausime

$$\Delta_{k+1} = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\ldots\cdot\frac{2k-1}{2k}\cdot\frac{2k+1}{2k+2} - \frac{1}{\sqrt{3k+4}} =$$

$$= \left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\ldots\cdot\frac{2k-1}{2k}\cdot\frac{2k+1}{2k+2} - \frac{1}{\sqrt{3k+4}}\cdot\frac{2k+1}{2k+2}\right) +$$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{3k+1}}\cdot\frac{2k+1}{2k+2} - \frac{1}{\sqrt{3k+4}}\right) =$$

$$= \frac{2k+1}{2k+2}\cdot\Delta_k + \frac{(2k+1)\sqrt{3k+4} - 2(k+1)\sqrt{3k+1}}{2(k+1)\sqrt{(3k+1)(3k+4)}}.$$

Pirmasis dėmuo yra neteigiamas, nes $\Delta_k \le 0$ (pagal prielaidą). Antrasis dėmuo yra neigiamas, nes

$$(2k+1)\sqrt{3k+4} - 2(k+1)\sqrt{3k+1} =$$

$$= -\frac{k}{2(k+1)\sqrt{(3k+4)} + 2(k+1)\sqrt{3k+1}}.$$

Taigi $\Delta_{k+1} < 0$.

Pagal matematinės indukcijos principą nelygybė $\Delta_n \le 0$ galioja su visais natūraliaisiais skaičiais n. Vadinasi,

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\ldots\cdot\frac{2n-1}{2n} \le \frac{1}{\sqrt{3n+1}}$$

su visais natūraliaisiais skaičiais n.

9. Kai $n=1$, gauname lygybę $\frac{1}{1!} = \frac{2\cdot 1-1}{1}$. Tarkime, kad duotoji nelygybė galioja, kai $n=k$, t. y.

$$\frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{k!} \le \frac{2k-1}{k}.$$

Tada

$$\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+...+\frac{1}{k!}+\frac{1}{(k+1)!}\leq\frac{2k-1}{k}+\frac{1}{(k+1)!}<\frac{2k-1}{k}+\frac{1}{k(k+1)}=$$
$$=\frac{2k+1}{k+1}.$$

Taigi nelygybė $\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+...+\frac{1}{n!}\leq\frac{2n-1}{n}$ galioja su $n=k+1$, kai ji galioja su $n=k$.

Pagal matematinės indukcijos principą nagrinėjamoji nelygybė galioja su visais natūraliaisiais skaičiais n.

10. Kai $n=1$, gauname lygybę.

Taikydami matematinės indukcijos metodą, tarkime, kad
$$|a_1+a_2+...+a_k|\leq|a_1|+|a_2|+...+|a_k|.$$

Nagrinėjant atvejį $n=k+1$ pakanka įrodyti, kad su bet kuriais realiaisiais skaičiais a ir b galioja nelygybė $|a+b|\leq|a|+|b|$. Remdamiesi šia nelygybe ir indukcijos prielaida, tada gautume:

$$|a_1+a_2+...+a_k+a_{k+1}|=$$
$$=|(a_1+a_2+...+a_k)+a_{k+1}|\leq|a_1+a_2+...+a_k|+|a_{k+1}|\leq$$
$$\leq|a_1|+|a_2|+...+|a_k|+|a_{k+1}|.$$

Taigi įrodykime, kad $|a+b|\leq|a|+|b|$, kai a ir b yra realieji skaičiai.

Jei $a+b\geq 0$, tai pagal modulio apibrėžimą $|a+b|=a+b$; be to, $a\leq|a|$, $b\leq|b|$. Vadinasi, $|a+b|\leq|a|+|b|$.

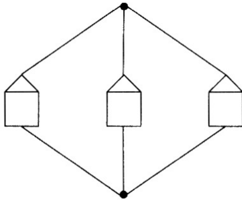
Jei $a+b<0$, tai $|a+b|=-(a+b)=(-a)+(-b)\leq|a|+|b|$.

Pagal matematinės indukcijos principą nelygybė
$$|a_1+a_2+...+a_n|\leq|a_1|+|a_2|+...+|a_n|$$
galioja su bet kuriuo dėmenų skaičiumi n, kai $a_i, i=1,2,...,n$, yra realieji skaičiai.

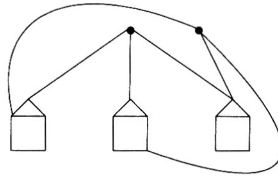
PENKTOSIOS UŽDUOTIES SPRENDIMAS

1. Galimi grafų pavyzdžiai (1 pav.):

a)



b)



1 pav.

2. Nagrinėkime grafą, kurio viršūnės yra kompiuteriai, o briaunos – kabeliai.

2. 1. Kadangi grafas neturi ciklų, tai jis yra medis. Todėl $B = V - 1$; čia V yra medžio viršūnių skaičius, o B – briaunų skaičius. Iš čia $B = 12 - 1 = 11$. Taigi kompiuteriams sujungti reikia 11 kabelių.

2. 2. Pašalinus briauną (kabelį), jungiančią kurias nors dvi viršūnes (kompiuterius), nebeliktų jokio kelio, jungiančio šias viršūnes (nes medyje nėra ciklų). Vadinasi, su mažesniu kabelių skaičiumi 12 kompiuterių negalima sujungti.

3. Grafas G_1 nejungus, nes yra sudarytas iš dviejų komponenčių, turinčių ciklus;

grafas G_2 nejungus, nes yra sudarytas iš dviejų medžių;

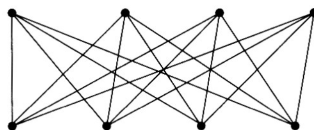
grafas G_3 yra jungus ir medis;

grafas G_4 yra jungus, bet nėra medis, nes turi ciklą.

4. Nagrinėkime grafą, kurio viršūnės yra gėlynai, o briaunos – takeliai. Kadangi gėlynai yra sujungti vienas su kitu paporiui, tai šis grafas turi $\frac{23 \times 22}{2} = 253$ briaunas. Pradėkime viena po kitos šalinti grafo briaunas, nepažeisdami grafo jungumo. Taip gausime medį, turintį 23 viršūnes ir 22 briaunas. Vadinasi, iš pradinio grafo galima pašalinti daugiausia $253 - 22 = 231$ briauną.

Ats.: Remontui galime uždaryti 231 takelį.

5. Nubrėžkime grafą, kurio briaunos vaizduoja takelius, jungiančius kiekvieną kaimyną su kiekvienu šuliniu (žr. 2 pav.).



2 pav.

Įrodysime, kad šis grafas negali būti plokščiasis. Tarkime priešingai: šį grafą galima nubrėžti taip, kad jo briaunos nesikirstų. Kadangi jis turi 8 viršūnes ir 16 briaunų, tai pagal Oilerio formulę gauname, kad $S=10$. Pastebėsime, kad visi šio grafo ciklai turi lyginį briaunų skaičių. Taigi kiekviena sritis yra apribota mažiausiai 4 briaunomis. Vadinasi, $2B \geq 4S$. Taigi $B \geq 2S$, t. y. $16 \geq 2 \cdot 10$. Prieštara!

Ats.: negali.

6. Sakykime, briaunainis turi S sienų. Kadangi šio briaunainio sienos yra trikampiai, tai kiekviena siena turi 3 briaunas, o bet kurios dvi sienos turi bendrą briauną. Taigi briaunainis turi $B=\frac{3S}{2}$ briaunų. Kiekvienoje sienoje yra 3 viršūnės. Kadangi kiekvienos viršūnės laipsnis lygus 5, tai kiekviena viršūnė skaičiuojama 5 kartus. Taigi $V=\frac{3S}{5}$. Pritaikykime šiam briaunainiui Oilerio formulę $S-B+V=2$. Gauname $S-\frac{3S}{2}+\frac{3S}{5}=2$. Iš čia $S=20$. Tada $B=\frac{3\cdot 20}{2}=30$, $V=\frac{3\cdot 20}{5}=12$. Taigi briaunainis turi 12 viršūnių, 30 briaunų ir 20 sienų (šis briaunainis vadinamas *ikosaedru*).

Ats.: 12 viršūnių, 30 briaunų, 20 sienų.

7. 1 būdas. Nubrėžkime grafą, kurio viršūnės yra 10 duotųjų taškų ir trys trikampio ABC viršūnės. Šis grafas yra plokščiasis ir jo briaunos neturi bendrų vidinių taškų. Grafas trikampio ABC vidų dalija į trikampius. Išorinė trikampio ABC dalis yra plokštumos sritis, turinti tris briaunas Kadangi bet kurios dvi sritys turi bendrą briauną, tai grafo briaunų skaičius yra $B=\frac{3S}{2}$; čia S – grafo

apribotų sričių skaičius. Grafas turi 13 viršūnių, todėl pagal Oilerio formulę $S - \frac{3S}{2} + 13 = 2$. Iš čia $S = 22$. Vadinasi, trikampis ABC yra padalytas į $S - 1 = 21$ trikampį.

2 būdas. Kadangi grafas turi 13 viršūnių, o jo ciklai yra trikampiai, tai pagal 3-ąją teoremą $B = \frac{n(V-2)}{n-2} = \frac{3 \cdot 11}{1} = 33$. Iš Oilerio formulės išplaukia, kad $S = 2 + B - V = 2 + 33 - 13 = 22$. Taigi trikampis ABC yra padalytas į $22 - 1 = 21$ trikampį.

Ats.: 21 trikampis.

8. Sudarykime grafą, kuriame viršūnės yra ežerai, briaunos – kanalai, o sienos – salos. Kadangi kanalai nesusikerta (pagal sąlygą), tai grafas yra plokščiasis ir jungus. Pagal sąlygą $V = 15$, $S = 7 + 1 = 8$. Todėl $B = S + V - 2 = 8 + 15 - 2 = 21$. Taigi reikės iškasti 21 kanalą.

Ats.: 21.

9. Korio maketas – jungus plokščiasis grafas, turintis 150 viršūnių. Grafo briaunų skaičius priklauso nuo grafo konfigūracijos. Pavyzdžiui, jeigu korio akutės yra išrikiuotos į vieną eilę, tai toks korys turės 37 akutes ir 186 briaunas. Jam sudėti reikia 186 degtukų.

Galima sudėti ir korį, turintį 40 akučių: 33 akutes surikiuokime į vieną eilę, tris akutes pridėkime vieną prie kitos iš viršaus, o 4 akutes (vieną prie kitos) pridėkime iš apačios. Toks korys turės 150 viršūnių ir 189 briaunas.

Tokių korių, sudarytų iš šešiakampių akučių, su 150 viršūnių, galima sukonstruoti ir daugiau.

Ats.: degtukų skaičius priklauso nuo korio konfigūracijos; gali būti 186, 189 ir kt.

10. Nagrinėkime grafą, kurio viršūnės yra miestai, o juos jungiantys keliai – briaunos. Šis grafas yra plokščiasis. Tarę, kad iš kiekvienos viršūnės išeina mažiausiai 6 briaunos, gautume, kad $B \geq \frac{6V}{2} = 3V$. Ši nelygybė prieštarauja nelygybei $B \leq 3V - 6$. Vadinasi, prielaidą turime atmesti. Taigi yra miestas, iš kurio išeina daugiausia 5 keliai.

ŠEŠTOSIOS UŽDUOTIES SPRENDIMAS

1. *Duota*: $a \parallel b$; c.

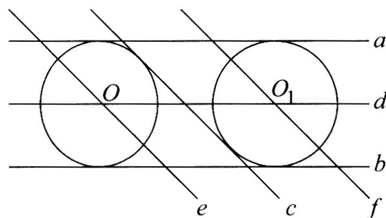
Brėžimas.

1) Tiesė $d \parallel a$ (V GVT).

2) $e \parallel c$, $f \parallel c$ (III GVT), atstumas tarp a ir d lygus atstumams tarp c ir e bei tarp tiesių c ir f ir lygus r.

3) $d \cap e = O$, $d \cap f = O_1$.

4) $(O; r)$ ir $(O_1; r)$ – ieškomieji apskritimai.

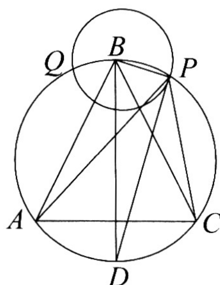


1 pav.

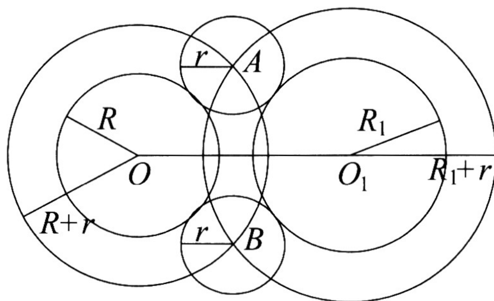
Įrodymas išplaukia iš GVT brėžimo.

Tyrimas. Sprendiniai visada du.

2. *Analizė*. Sakykime, kad apibrėžto apie trikampį ABC apskritimo ir duotojo apskritimo sankirta yra taškai P ir Q (2 pav.), taškas D yra lanko AC vidurys. Kadangi BD yra apibrėžto apskritimo skersmuo, tai $\angle BPD = 90^\circ$, t. y. tiesė DP yra duotojo apskritimo liestinė. Kadangi taškas D yra lanko AC vidurio taškas, tai $\angle APD = \angle CPD$, taigi taškas P (analogiškai taškas Q) ieškomasis.



2 pav.



3 pav.

3. *Duota:* $(O; R)$ ir $(O_1; R_1)$ bei spindulys r ____

Brėžimas.

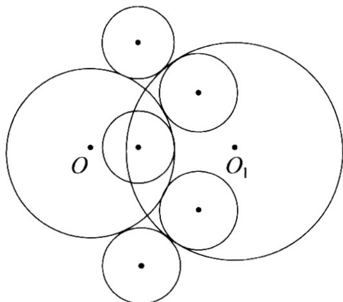
1) $(O; R+r)$.

2) $(O_1; R_1+r)$.

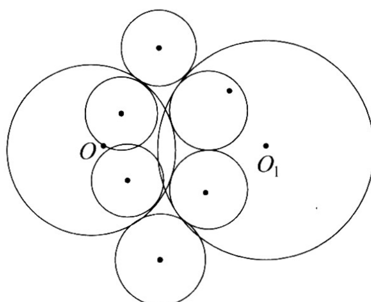
3) $(O; R+r) \cap (O_1; R_1+r) = \{A \text{ ir } B\}$;

4) $(A; r)$ ir $(B; r)$ yra ieškomieji apskritimai.

Įrodymas išplaukia iš brėžimo.



4 pav. (7 sprendiniai)



5 pav. (6 sprendiniai)

Tyrimas.

1) Jei $OO_1 > R + R_1 + 2r$ – sprendinių nėra.

2) Kai $OO_1 = R + R_1 + 2r$ – vienas sprendinys.

3) $R + R_1 < O_1O < R + R_1 + 2r$ – du sprendiniai (3 pav.).

4) $O_1O = R + R_1 - 2r$ – septyni sprendiniai.

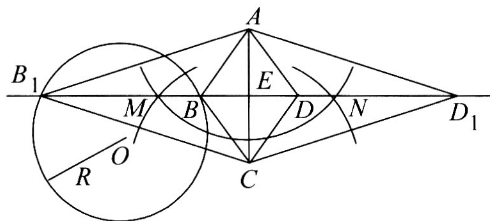
5) $O_1O = R + R_1$ – keturi sprendiniai.

6) O_1 sutampa su O_2, $R_2 = R_1 + 2r$ – be galo daug sprendinių.

7) $R + R_1 - 2r < O_1O < R_1 + R_2$ – šeši sprendiniai.

8) $O_1O = R - R_1$ – trys sprendiniai.

4. *Analizė.* Kadangi rombo įstrižainės susikirsdamos dalijasi pusiau ir yra tarpusavyje statmenos, tai likusios rombo viršūnės priklausys II GVT.



6 pav.

Brėžimas.

1) $MN \perp AC$ ($AE = EC$) (II GVT).

2) $MN \cap (O; R) = \{B \text{ ir } B_1\}$.

3) $ED = EB$ ((**1**)).

4) $ED_1 = EB_1$ ((**1**)).

5) AB, BC, CD, DA; AB_1, B_1C, CD_1, D_1A.

Keturkampiai $ABCD$ ir AB_1CD_1 yra ieškomieji rombai; tai išplaukia iš brėžimo.

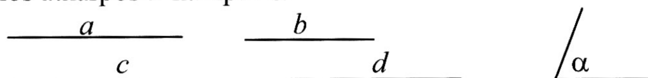
Tyrimas.

1) Jei MN nekerta (O; R), sprendinių nėra.

2) Jei MN liečia (O; R) viename taške – vienas sprendinys.

3) Jei MN kerta (O; R) dviejuose taškuose, uždavinys turi du sprendinius.

5. *Duota:* keturios atkarpos ir kampas α



Brėžimas.

1) ΔABD, $AB = a$, $AD = d$, $\angle BAD = \alpha$ ((**10**)).

2) $(B; b) \cap (D; c) = C$ (I GVT).

3) BC ir $CD \Rightarrow$ keturkampis $ABCD$ yra ieškomasis.

Įrodymas seka iš brėžimo.

Tyrimas.

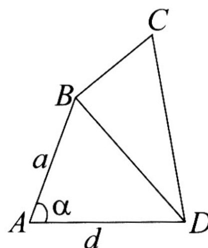
Jei kampas $\alpha < 180^\circ$, egzistuoja vienintelis ΔABD.

Jei $BD < c + b$,

($BD = \sqrt{a^2 + d^2 - 2ad\cos\alpha}$),

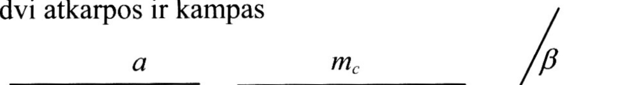
egzistuoja vienintelis keturkampis $ABCD$.

Jei $BD \geq b + c$ sprendinio nėra.



7 pav.

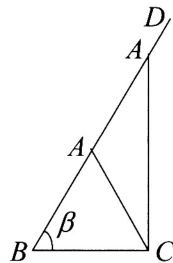
6. *Duota:* dvi atkarpos ir kampas



Brėžimas.

1) $BC = a$ ((**1**)).

2) $\angle CBD = \beta$ ((**2**)).
3) $(C; m_c) \cap BD = E$ (I GVT).
4) $BE = EA$ ((**1**)) $A \in BD$.
5) $CA \Rightarrow \Delta ABC$ ieškomasis.
Įrodymas išplaukia iš brėžimo.
Tyrimas.
Sprendinys yra vienas, jei $m_c \geq a \sin \beta$.
Jei $m_c < a \sin \beta$, sprendinių nėra.



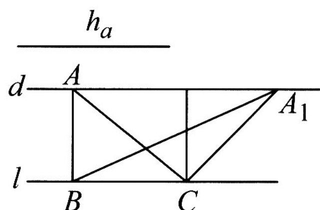
8 pav.

7. *Duota:* atkarpos



h_a

Brėžimas.
1) $BC = a$ ((**1**)).
2) $d \parallel l$, atstumas tarp d ir l lygus h_a (III GVT).
3) $(C; b) \cap d = \{A \text{ ir } A_1\}$ (I GVT).

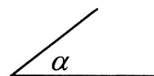


9 pav.

4) AB ir AC; A_1B ir $A_1C \Rightarrow \Delta\ ABC$ ir A_1BC yra ieškomieji.
Įrodymas išplaukia iš brėžimo.
Tyrimas.
Jei $b < h_a$ – sprendinių nėra. Jei $b = h_a$ – vienas sprendinys. Jei $b > h_a$ – du sprendiniai.

8. *Duota:* atkarpos ir kampas



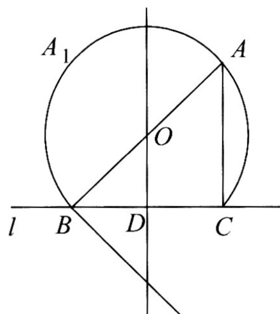


Brėžimas.
1) $BC = a$ ((**1**)).
2) BC matoma kampu α (VI GVT; (O; OB)).
3) $BD = DC$, $D \in BC$ ((**3**)).
4) $(D; m_a) \cap (O; OB) = \{A; A_1\}$.
5') AB ir $AC \Rightarrow \Delta\ ABC$ ieškomasis.
5'') BA' ir $CA' \Rightarrow \Delta BA_1C$ taip pat yra sprendinys.

Įrodymas išplaukia iš brėžimo.
Tyrimas.

Jei $m_a < \dfrac{BC}{2}$ sprendinių nėra.

Jei $m_a > \dfrac{BC}{2}$, vienas sprendinys.(nes gautieji trikampiai yra lygūs).



10 pav.

9. Pasirinkime koordinačių sistemą, kad tiesė AB sutaptų su Ox ašimi, o taškas A būtų koordinačių sistemos pradžios taškas. Tada $A(0; 0)$, $B(a; 0)$, nes $AB = a$. Taškas $M(x; y)$ priklauso ieškomajai taškų aibei tada ir tik tada, kai

$$AM^2 - BM^2 = b^2.$$

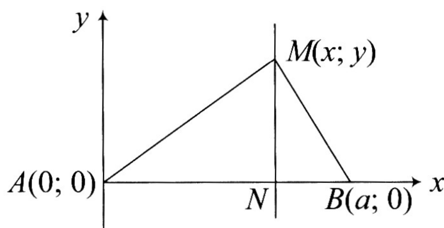
Kadangi

$$AM^2 = x^2 + y^2,$$

$$BM^2 = (x-a)^2 + y^2,$$

tai

$$AM^2 - BM^2 = x^2 + y^2 - $$
$$-(x^2 - 2ax + a^2 + y^2) =$$
$$= 2ax - a^2.$$



11pav.

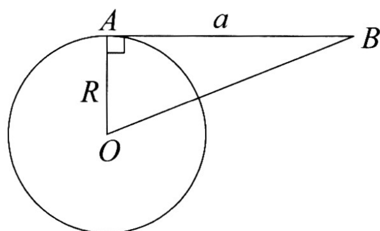
Pagal sąlygą $2ax - a^2 = b^2$, t. y. $2ax = a^2 + b^2$, $x = \dfrac{b^2 + a^2}{2}$. Iš čia išplaukia, kad taškas M yra tiesėje, statmenoje Ox ašiai.

Ats.: tiesė, statmena tiesei AB.

10. Sakykime, kad iš taško B apskritimui nubrėžtos liestinės ilgis lygus a (12 pav.). Iš trikampio AOB gauname, kad $OB = \sqrt{R^2 + a^2}$.

Taigi visi taškai B, tenkinantys sąlygą, yra nuo O nutolę pastoviu atstumu, todėl jie priklauso apskritimui $(O; \sqrt{R^2 + a^2})$.

Ats.: apskritimas $(O; \sqrt{R^2 + a^2})$.



12 pav.

SEPTINTOSIOS UŽDUOTIES SPRENDIMAS

1. $X = \{a; b; c; d\} \cap (\{a; e\} \cup \{b; d; e; f\}) =$
$= \{a; b; c; d\} \cap \{a; b; d; e; f\} = \{a; b; d\}$,
$Y = (\{a; b; c; d\} \cap \{b; d; e; f\}) \cup \{a; e\} = \{b; d\} \cup \{a; e\} = \{a; b; d; e\}$,
$Z = (\{a; b; c; d\} \setminus \{b; d; e; f\}) \setminus (\{a; e\} \setminus \{b; d; e; f\}) =$
$= \{a; c\} \setminus \{a\} = \{c\}$,
$V = (\{a; b; c; d; e; f; g\} \setminus \{a; b; c; d\}) \cup (\{b; d; e; f\} \setminus \{a; e\}) =$
$= \{e; f; g\} \cup \{b; d; f\} = \{b; d; e; f; g\}$.

Ats.: $X = \{a; b; d\}$, $Y = \{a; b; d; e\}$, $Z = \{c\}$, $V = \{b; d; e; f; g\}$.

2. Tegu $\overline{mnknm}$ yra bet kuris aibės A elementas. Galimos m reikšmės yra 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9; galimos n ir k reikšmės yra 0; 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Pagal kombinatorinę daugybos taisyklę aibės A elementų skaičius yra: $9 \cdot 10 \cdot 10 = 900$.

*Ats.:*900.

3. Iš pradžių išspręskime lygtį $\sin^4 \frac{x}{2} - \cos^4 \frac{x}{2} = \sin \frac{2x - \pi}{2}$:

$$\left(\sin^4 \frac{x}{2} - \cos^4 \frac{x}{2} = \sin \frac{2x - \pi}{2}\right) \Rightarrow \left(\sin^2 \frac{x}{2} - \cos^2 \frac{x}{2} = \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right)\right) \Rightarrow$$

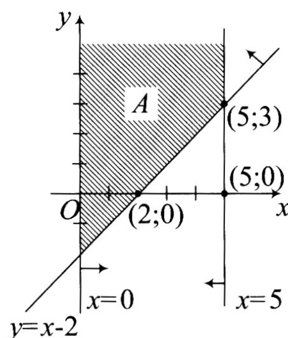
$$\Rightarrow (-\cos x = -\cos x) \Rightarrow (x \in (-\infty; +\infty)).$$

Taigi $B = \{x : x \in (-\infty; +\infty), x \geq 0\} = [0; +\infty)$.

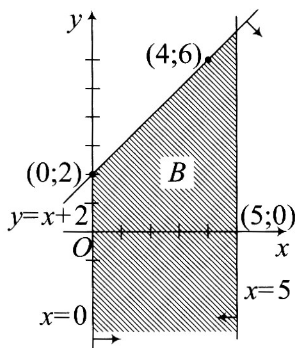
Matome, kad aibė A yra aibės B poaibis: $A \subset B$.

Ats. taip.

4. Skaičių x ir y poros $(x; y)$ Dekarto koordinačių sistemoje yra vaizduojamos taškais. Nelygybę $0 \le x \le 5$ atitinka juosta, kurios taškų koordinatės $(x; y)$ tenkina sąlygą: $0 \le x \le 5$, $y \in (-\infty; +\infty)$. Nelygybę $y \ge x - 2$ atitinka pusplokštumė, kurios kraštas yra tiesė $y = x - 2$ (ši pusplokštumė 1 pav. pažymėta rodykle). Aibė A yra šios pusplokštumės ir minėtos juostos bendroji dalis (žr. 1 pav.). Aibė B yra tos pačios juostos ir pusplokštumės, kurią apibrėžia nelygybė $y \le x + 2$, bendroji dalis (žr. 2 pav.). Aibė C yra aibių A ir B sankirta (žr. 3 pav.).



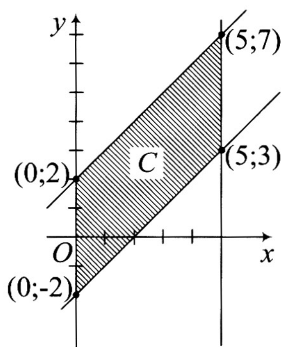
1 pav.



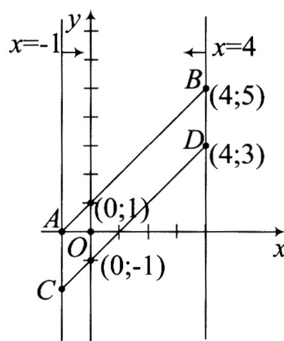
2 pav.

5. Aibę Z galima išskaidyti į dvi:
$Z' = \{(x; y) : -1 \le x \le 4,\ y - x = 1\}$
ir
$Z'' = \{(x; y) : -1 \le x \le 4,\ y - x = -1\}$.

Tada $Z = Z' \cup Z''$. Dviguba nelygybė $-1 \le x \le 4$ plokštumoje apibrėžia juostą tarp tiesių $x = -1$ ir $x = 4$. Lygtys $y - x = 1$ ir $y - x = -1$ yra tiesių lygtys (jas galima užrašyti $y = x + 1$ ir $y = x - 1$). Pirmoji tiesė eina per taškus (0; 1) ir (4; 5), o antroji – per taškus (0; –1) ir (4; 3). Aibės Z' geometrinis vaizdas yra atkarpa AB (žr. 4 pav.), o aibės Z'' geometrinis vaizdas yra atkarpa CD (žr. 4 pav.). Tiesės AB ir CD yra tarpusavyje lygiagrečios. Taigi aibės Z geometrinis vaizdas yra tarpusavyje lygiagrečių atkarpų AB ir CD pora (žr. 4 pav.).



3 pav.



4 pav.

6. Aibė S yra netuščia tik tada, kai sistema

$$\begin{cases} f(x) - 2x + 1 = 0, \\ x > 0 \end{cases}$$

turi bent vieną sprendinį. Nagrinėkime šią sistemą keturiais atvejais:

a) $\begin{cases} -\dfrac{1}{x} - 2x + 1 = 0, \\ x > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x^2 - x + 1 = 0, \\ x > 0 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} \left(\sqrt{2}x - \dfrac{1}{2\sqrt{2}}\right)^2 + \dfrac{7}{8} = 0, \\ x > 0 \end{cases} \Rightarrow \varnothing \Rightarrow S = \varnothing;$

b) $\begin{cases} 2x^4 - 1 - 2x + 1 = 0, \\ x > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x(x-1)(x^2 + x + 1) = 0, \\ x > 0 \end{cases} \Rightarrow x = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow S = \{(1; 0)\}$;

c) $\begin{cases} 2x - 3 - 2x + 1 = 0, \\ x > 0 \end{cases} \Rightarrow \varnothing \Rightarrow S = \varnothing;$

d) $\begin{cases} -\sin x - 2x + 1 = 0, \\ x > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sin x = 1 - 2x, \\ x > 0 \end{cases} \Rightarrow S \neq \varnothing$, nes sinusoidė

$y = \sin x$ ir tiesė $y = 1 - 2x$ susikerta, kai $x \in (0; 1)$.

Ats.: b, d.

7. Lygybė $A = B$ galioja, jei $y = \cos^2\left(\frac{17\pi}{2} - 2x\right) + \cos 9x + 5$ yra lyginė funkcija. Patikrinkime.

Aišku, kad šios funkcijos apibrėžimo sritis $(-\infty; +\infty)$ yra simetriška nulio atžvilgiu. Todėl reikia tikrinti tik sąlygą $y(-x) = y(x)$:

$$y(-x) = \cos^2\left(\frac{17\pi}{2} + 2x\right) + \cos(-9x) + 5 = \cos^2\left(\frac{\pi}{2} + 2x\right) + \cos 9x + 5 =$$

$$= \cos^2\left(8\pi + \frac{\pi}{2} - 2x\right) + \cos 9x + 5 = \cos^2\left(\frac{17\pi}{2} - 2x\right) + \cos 9x + 5 =$$

$$= y(x).$$

Taigi $A = B$.

Ats.: taip.

8. Iš pradžių raskime m reikšmes, su kuriomis abiejų lygčių,

$$x^2 + 2(m-3)x + m^2 - 7m + 12 = 0$$

ir

$$x^2 + m^2x + (6-5m)x = 0,$$

sprendiniai sutampa.

Antroji lygtis turi sprendinį $x = 0$, todėl pagal Vijeto teoremą pirmosios lygties narys $m^2 - 7m + 12$ turi būti lygus nuliui; tada

$$m^2 - 7m + 12 = 0 \Rightarrow m \in \{3; 4\}.$$

Kai $m = 3$, gauname dvi vienodas lygtis: $x^2 = 0$; taigi šiuo atveju $X_1 = X_2$.

Kai $m = 4$, vėl gauname abi vienodas lygtis: $x^2 + 2x = 0$; taigi ir šiuo atveju $X_1 = X_2$.

Išvada tokia: $X_1 \neq X_2$, kai $m \in (-\infty; 3) \cup (3; 4) \cup (4; +\infty)$.

Ats.: $m \in (-\infty; 3) \cup (3; 4) \cup (4; +\infty)$.

9. Spręskime lygtį $(x-2)^2 = ax^2$:

$(x-2)^2 = ax^2 \Rightarrow (1-a)x^2 - 4x + 4 = 0 \Rightarrow (x = 1, \text{kai } a = 1)$ arba

$x = \dfrac{2 \pm 2\sqrt{a}}{1-a}$, kai $a \neq 1$).

Matome, kad aibė $Z = Z_1 \cap Z_2$

1) yra tuščia, kai $a < 0$;

2) turi vieną elementą, kai $a \in \{0; 1\}$;

3) turi du elementus, kai $a \in (0; 1) \cup (1; +\infty)$.

Ats.: priklauso.

10. Tegu x_a, x_g ir x_t yra tik po vieną uždavinį (atitinkamai algebros, geometrijos ir trigonometrijos) išsprendusių mokinių skaičiai. Po du uždavinius išsprendusių mokinių skaičius pažymėkime x_{ag} (algebros ir geometrijos), x_{at} (algebros ir trigonometrijos) ir x_{gt} (geometrijos ir trigonometrijos). Simbolis x_{agt} reiškia visus tris uždavinius išsprendusių mokinių skaičių. Pagal uždavinio sąlygą galioja tokios lygybės:

$$x_a + x_{ag} + x_{at} + x_{agt} = 23,$$
$$x_g + x_{ag} + x_{gt} + x_{agt} = 19,$$
$$x_t + x_{at} + x_{gt} + x_{agt} = 16,$$
$$x_{ag} + x_{agt} = 12,$$
$$x_{at} + x_{agt} = 10,$$
$$x_{gt} + x_{agt} = 7,$$
$$x_a + x_g + x_t + x_{ag} + x_{at} + x_{gt} + x_{agt} = 32\,.$$

Pastarąją lygybę gauname iš sąlygos, kad konkurse dalyvavo 37 mokiniai, bet 5 iš jų neišsprendė nė vieno uždavinio.

Parašytąją lygčių sistemą visai lengva suprastinti iki tokios:

$$\begin{cases} x_a - x_{agt} = 1, \\ x_g - x_{agt} = 0, \\ x_t - x_{agt} = -1, \\ x_a + x_g + x_t - 2x_{agt} = 3. \end{cases}$$

Matome, kad $x_{agt}=3$, $x_{ag}=9$, $x_{at}=7$, $x_{gt}=4$.

Taigi visus tris uždavinius išsprendė 3 mokiniai, o tik po du uždavinius išsprendė 20 mokinių.

Ats.: 3; 20.

AŠTUNTOSIOS UŽDUOTIES SPRENDIMAS

1. Naudodami funkcijų sandaugos ir sudėtinės funkcijos diferencijavimo formules, randame

$$g'(x)=\left(x^5\right)' f\left(\frac{1}{x^2}\right)+x^5\left(f\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)' =$$

$$=5x^4\cdot f\left(\frac{1}{x^2}\right)+x^5 f'\left(\frac{1}{x^2}\right)\cdot\left(\frac{-2}{x^3}\right).$$

Todėl $g'(1)=5f(1)+f'(1)(-2)=11.$

Ats.: $g'(1)=11$.

2. Įrašę duotojoje lygybėje $x=1$, gauname $f(1)-3f(-1)=-2$ Funkcija $f(x)$ lyginė, todėl $f(-1)=f(1)$ ir $-2f(1)=-2$, o iš čia $f(1)=1$. Diferencijuokime abi lygybės puses:

$$f'\left(2x^3-x\right)\cdot\left(6x^2-1\right)-6x\cdot f\left(x^2-2x\right)-3x^2\cdot f'\left(x^2-2x\right)\cdot(2x-2)=$$

$$=-6x^5-60x^4+64x^3-14x.$$

Kai $x=1$, $f'(1)\cdot 5-6f(-1)=-16.$

Iš čia: $5f'(1)=-10$, $f'(1)=-2$.

Dabar jau galime parašyti liestinės taške $x=1$ lygtį $y=-2(x-1)+1$ arba $y=-2x+3$.

Ieškoma funkcija lyginė. Lygybėje įrašę $x=0$, matome, kad $f(0)=2$. Todėl ieškokime jos tarp funkcijų $f(x)=ax^2+2$. Įrašę šią $f(x)$ išraišką į lygybę, gauname:

$$a\left(2x^3 - x\right)^2 + 2 - 3x^2\left(a\left(x^2 - 2x\right)^2 + 2\right) =$$

$$= -x^6 - 12x^5 + 16x^4 - 7x^2 + 2,$$

$$ax^6 + 12ax^5 - 16ax^4 + (a-6)x^2 + 2 =$$

$$= -x^6 - 12x^5 + 16x^4 - 7x^2 + 2.$$

Matome, kad su $a = -1$ gauname tapatybę. Taigi ieškomoji funkcija yra $f(x) = -x^2 + 2$. Iš lygybės nesunku matyti, kad aukštesnių laipsnių daugianariai jos tapačiai tenkinti negali.

Ats.: $y = -2x + 3$, $f(x) = -x^2 + 2$.

3. Nagrinėkime funkcijas $f(x) = e^x$ ir $g(x) = \ln(1 + x)$.

Pastebėkime, kad $g(x)$ apibrėžta tik intervale $(-1; +\infty)$, todėl apie nelygybės teisingumą galima kalbėti tik šiame intervale.

$$f(0) = 1, \quad g(0) = 0.$$

$$f'(x) = e^x, \quad g'(x) = \frac{1}{1+x}.$$

Kaip žinome, $e^x > 1$ ir $\frac{1}{1+x} < 1$, kai $x > 0$. Taigi $e^x > \frac{1}{1+x}$.

Iš teoremos išplaukia, kad nelygybė $e^x > \ln(1 + x)$ teisinga intervale $(0; +\infty)$.

Nesunku suvokti ir visai analogiškai įrodyti, kad teisinga teorema ir „į kairę“ nuo pradinio taško a:

Teorema. Sakykime, funkcijos $f(x)$ ir $g(x)$ yra diferencijuojamos intervale $(b; a]$. Jeigu $f(a) \geq g(a)$ ir su visais $b < x < a$ teisinga nelygybė $f'(x) < g'(x)$, tai $f(x) > g(x)$ su visais $b < x < a$.

Dabar pakanka tik pastebėti, kad $e^x < \frac{1}{1+x}$, kai $x \in (-1; 0)$.

Iš čia išplaukia, kad $e^x > \ln(1 + x)$ intervale $(-1, 0)$. Ši

nelygybė teisinga ir taške $x = 0$. Taigi nelygybė įrodyta visam intervalui $(-1; +\infty)$.

4.1. Abi funkcijos apibrėžtos visoje R. Įsitikinsime, kad jų išvestinės teigiamos:

$$f'(x) = \frac{3}{2} > 0;$$

$$g'(x) = 2 - \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \geq 2 - \frac{|x|}{\sqrt{1+x^2}} = 2 - \sqrt{\frac{x^2}{1+x^2}} > 1 > 0.$$

Vadinasi, abi funkcijos yra didėjančios visoje R. Sudarykime lygtį $\frac{3}{2}x = 2x - \sqrt{1+x^2}$. Iš jos:

$$\sqrt{1+x^2} = \frac{x}{2}, \quad 1 + x^2 = \frac{x^2}{4}, \quad \frac{3}{4}x^2 = -1.$$

Lygtis sprendinių neturi, todėl funkcijų grafikai bendrų taškų irgi neturi.

4.2. Pažymėkime atkarpos M_1M_2 ilgį $|M_1M_2| = l$. Tada $a = f(x-l) = g(x)$, taigi $\frac{3}{2}(x-l) = 2x - \sqrt{1+x^2}$. Iš čia

$$l = \frac{2}{3}\left(\sqrt{1+x^2} - \frac{x}{2}\right).$$

Liko rasti funkcijos $l(x) = \frac{2}{3}\left(\sqrt{1+x^2} - \frac{x}{2}\right)$ mažiausią reikšmę. Jos išvestinė $l'(x) = \frac{2}{3}\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} - \frac{1}{2}\right)$.

Spręsdami lygtį $l'(x) = 0$, gauname, kad funkcija $l(x)$ turi vienintelį kritinį tašką $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Norėdami įsitikinti, kad tai

minimumo taškas, rasime funkcijos $h(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ išvestinės ženklą.

$$h'(x)=\frac{\sqrt{1+x^2}-\dfrac{x\cdot x}{\sqrt{1+x^2}}}{1+x^2}=\frac{1}{\left(1+x^2\right)^{3/2}}>0.$$

Vadinasi, funkcija $h(x)$ savo reikšmę $\frac{1}{2}$ įgijo didėdama, todėl $l'(x)$ iki kritinio taško buvo neigiama, o už jo – teigiama. Vadinasi, $x=\frac{1}{\sqrt{3}}$ yra minimumo taškas.

$$l\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=\frac{2}{3}\left(\sqrt{1+\frac{1}{3}}-\frac{1}{2\sqrt{3}}\right)=\frac{1}{\sqrt{3}},$$

$$a=g\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=\frac{2}{\sqrt{3}}-\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{3}}}=0.$$

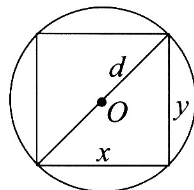
Ats.: 0; $\frac{1}{\sqrt{3}}$.

5. Pjaunamo balkio (žr. 1 pav.) skerspjūvio plotį pažymėjus x, jo aukštis $y=\sqrt{d^2-x^2}$; todėl atsparumą lenkimui nusako funkcija $f(x)=Cx(d^2-x^2)$; čia C – proporcingumo koeficientas. Liko rasti funkcijos $f(x)$ maksimumą intervale (0; d).

Išvestinę $f'(x)=C(d^2-3x^2)$ prilyginę nuliui, gauname

$$x=\frac{d}{\sqrt{3}},$$

$$y=\sqrt{d^2-\frac{d^2}{3}}=\sqrt{\frac{2}{3}}d.$$

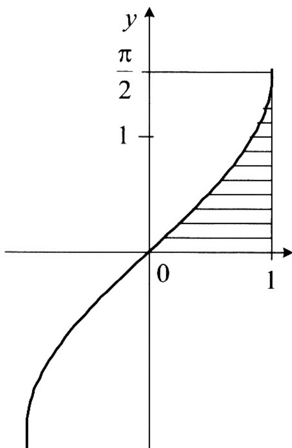


1 pav.

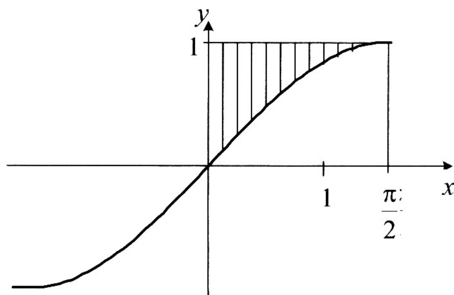
Lengva įsitikinti, kad rastasis kritinis taškas yra maksimumo taškas.

Ats.: plotis $\frac{d}{\sqrt{3}}$ cm, aukštis $\sqrt{\frac{2}{3}}d$ cm.

6. Funkcija $f(x) = \arcsin x$, $0 \le x \le 1$ yra atvirkštinė funkcijai $g(x) = \sin x$, $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$ (žr. 2 pav. ir 3 pav.). Todėl



2 pav.



3 pav.

$$\int_0^1 \arcsin x \; dx = \frac{\pi}{2} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \; dx = \frac{\pi}{2} + \cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} - 1 .$$

Ats.: $\frac{\pi}{2} - 1$.

7. Pertvarkykime kreivės lygtį:

$$|y-3| = 2|x-2| - \left(x^2 - 4x + 4\right) + 3 ,$$

$$|y-3| = 2|x-2| - (x-2)^2 + 3 .$$

Matome, kad kreivė turi dvi simetrijos ašis $x = 2$ ir $y = 3$. Kai $x \geq 2$, $y \geq 3$, kreivės lygtis

$$(y-3) = 2(x-2) - \left(x^2 - 4x + 4\right) + 3,$$

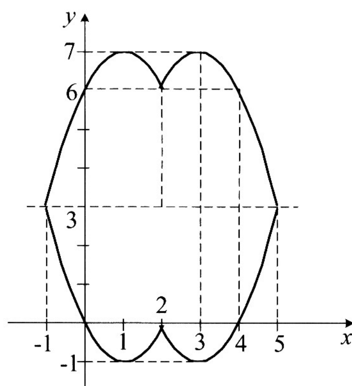
arba $y = -x^2 + 6x - 2$.

Pasirodo, tai yra parabolės dalis. Kitas tris dalis nubraižome (žr. 4 pav.) simetriškai tiesėms $x = 2$ ir $y = 3$. Akivaizdu, kad šios figūros plotas išreiškiama keturgubu integralu

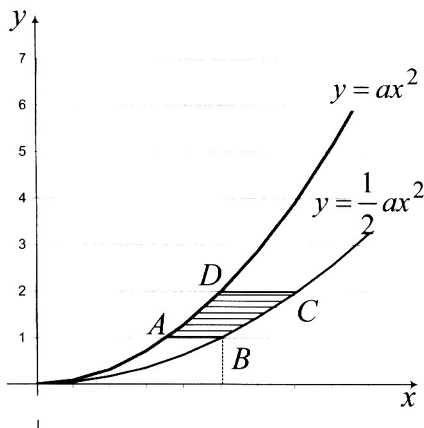
$$S = 4\int_2^5 \left(\left(-x^2 + 6x - 2\right) - 3\right)dx =$$

$$= 4\int_2^5 \left(-x^2 + 6x - 5\right)dx = \quad = 4\left(-\frac{x^3}{3} + 6\frac{x^2}{2} - 5x\right)\Bigg|_2^5 = 36.$$

Ats.: 36.



4 pav.



5 pav.

8. **1 būdas.** Nesunku rasti tiesių ir parabolių susikirtimo taškus $A\left(\frac{1}{\sqrt{a}}; 1\right)$, $B\left(\sqrt{\frac{2}{a}}; 1\right)$, $C\left(\frac{2}{\sqrt{a}}; 2\right)$, $D\left(\sqrt{\frac{2}{a}}; 2\right)$. Pastebėję, kad taškų *B* ir *D* abscisės lygios, ieškomą figūros (žr. 5 pav.) plotą išreiškiame integralais

$$S(a)=\int_{\frac{1}{\sqrt{a}}}^{\sqrt{\frac{2}{a}}}\left(ax^2-1\right)dx+\int_{\sqrt{\frac{2}{a}}}^{\frac{2}{\sqrt{a}}}\left(2-\frac{1}{2}ax^2\right)dx=$$

$$=\left(a\frac{x^3}{3}-x\right)\Bigg|_{\frac{1}{\sqrt{a}}}^{\sqrt{\frac{2}{a}}}+\left(2x-\frac{a}{2}\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{\sqrt{\frac{2}{a}}}^{\frac{2}{\sqrt{a}}}.$$

Apskaičiavę gausime

$$S(a)=\frac{1}{\sqrt{a}}\left(\frac{10}{3}-2\sqrt{2}\right).$$

2 būdas. Iš $y=ax^2$ išreiškiame $x=\sqrt{\frac{y}{a}}$, o iš $y=\frac{1}{2}ax^2$ gauname $x=\sqrt{\frac{2y}{a}}$, $1\le y\le 2$. Tuomet

$$S(a)=\int_1^2\left(\sqrt{\frac{2y}{a}}-\sqrt{\frac{y}{a}}\right)dy=\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{a}}\int_1^2\sqrt{y}\,dy=$$

$$=\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{a}}\,\frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}}\Bigg|_1^2=\frac{1}{\sqrt{a}}\left(\frac{10}{3}-2\sqrt{2}\right).$$

Didėjant a reikšmėms, šios funkcijos reikšmės mažėja, todėl didžiausią reikšmę ji įgyja, kai $a=1$.

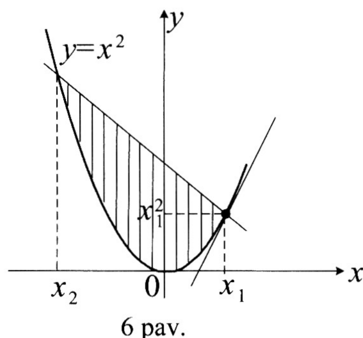
Ats. $\frac{10}{3}-2\sqrt{2}$.

9. Per parabolės $y=x^2$ tašką $\left(x_1\ ,\ x_1^2\right)$ nubrėžtos liestinės (žr. 6 pav.) lygtis yra $y=2x_1\left(x-x_1\right)+x_1^2$.

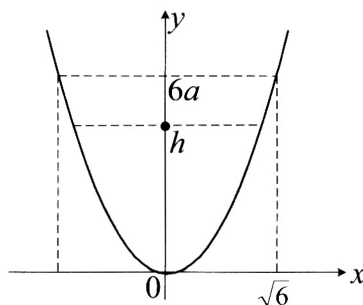
Todėl normalės lygtis yra $y=-\dfrac{1}{2x_1}\left(x-x_1\right)+x_1^2$ arba

$y=-\dfrac{1}{2x_1}+x_1^2+\dfrac{1}{2}$. Iš geometrinės uždavinio prasmės aišku, kad

pakanka nagrinėti atvejį, kai $x_1\in\left(0;+\infty\right)$



6 pav.



7 pav.

Rasime parabolės ir jos normalės susikirtimo taškus:

$$\begin{cases} y=x^2, \\ y=-\dfrac{1}{2x_1}x+x_1^2+\dfrac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow x^2+\frac{1}{2x_1}x-x_1^2-\frac{1}{2}=0 .$$

Viena šios lygties šaknis yra x_1. Pagal Vijeto teoremą randame antrą šaknį: $x_2=-x_1-\dfrac{1}{2x_1}$.

Taigi ieškomas plotas išreiškiamas integralu

$$S\left(x_1\right)=\int_{x_2}^{x_1}\left(-\frac{1}{2x_1}x+x_1^2+\frac{1}{2}-x^2\right)dx=$$

$$=\int_{-x_1-\frac{1}{2x_1}}^{x_1}\left(-\frac{1}{2x_1}x+x_1^2+\frac{1}{2}-x^2\right)dx .$$

Apskaičiuoti tokį integralą nėra sunku, bet tiesiogiai skaičiuojant prireikia daug kruopščių pertvarkymų. Pabandykime

skaičiavimus kiek sutrumpinti. Pastebėkime, kad po integralo ženklu yra tas pats kvadratinis trinaris, kurio šaknų ieškojome, tik su priešingu ženklu. Vėl panaudokime Vijeto teoremą:

$$-\frac{1}{2x_1}x + x_1^2 + \frac{1}{2} - x^2 = -\left(x^2 + \frac{1}{2x_1}x - x_1^2 - \frac{1}{2}\right) = .$$
$$= -\left(x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2\right)$$

Dabar

$$S(x_1) = -\int_{x_2}^{x_1}\left(x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2\right)dx =$$

$$= -\left(\frac{x^3}{3} - (x_1 + x_2)\frac{x^2}{2} + x_1x_2x\right)\Bigg|_{x_2}^{x_1} =$$

$$= -\left(\frac{x_1^3 - x_2^3}{3} - (x_1 + x_2)\frac{x_1^2 - x_2^2}{2} + x_1x_2(x_1 - x_2)\right) =$$

$$= -\frac{1}{6}(x_1 - x_2)\left(2\left(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2\right) - 3(x_1 + x_2)^2 + 6x_1x_2\right) =$$

$$= -\frac{1}{6}(x_1 - x_2)\left(-x_1^2 + 2x_1x_2 - x_2^2\right) =$$

$$= \frac{1}{6}(x_1 - x_2)^3 = \frac{1}{6}\left(x_1 + x_1 + \frac{1}{2x_1}\right)^3 = \frac{1}{6}\left(2x_1 + \frac{1}{2x_1}\right)^3.$$

Gautosios funkcijos išvestinė pagal argumentą x_1 yra

$$S'(x_1) = \frac{1}{2}\left(2x_1 + \frac{1}{2x_1}\right)^2\left(2 - \frac{1}{2x_1^2}\right).$$

$S'(x_1) = 0$, kai $x_1 = \frac{1}{2}$, $(x_1 > 0)$. Išvestinė $S'(x_1)$ keičia ženklą (pereidama tašką $x_1 = \frac{1}{2}$) iš neigiamo į teigiamą, todėl

$x_1 = \frac{1}{2}$ yra minimumo taškas intervale $(0;+\infty)$. Taigi mažiausias nagrinėjamos figūros plotas yra $S\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{4}{3}$.

Ats.: $\frac{4}{3}$.

10. Iš lygties $y = ax^2$ išreiškiame $x = \sqrt{\frac{y}{a}}$. Taigi pilant skystį į taurelę iki lygio h (žr. 7 pav.), jo tilps

$$V(h) = \pi \int_0^h \left(\sqrt{\frac{y}{a}}\right)^2 dy = \frac{\pi}{a}\int_0^h y\,dy = \frac{\pi}{a}\frac{y^2}{2}\Bigg|_0^h = \frac{\pi h^2}{2a}.$$

Kai taurelė pilna, $h = 6a$ ir

$V(6a) = \frac{\pi(6a)^2}{2a} = 18\pi a = 72.$ Iš čia $a = \frac{4}{\pi}$. Įrašę gautąją a reikšmę, gauname, kad $V(h) = \frac{\pi^2 h^2}{8}$. Iš lygties $\frac{\pi^2 h^2}{8} = 24$ randame $h = \frac{8}{\pi}\sqrt{3}$.

Ats.: $\frac{8\sqrt{3}}{\pi}$

BAIGIAMOSIOS UŽDUOTIES ATSAKYMAI

1	2	3	4
63	$\frac{128}{3}$	Taip	190



Išleistose LJMM knygelėse buvo nagrinėtos tokios temos:

I KNYGA

I. J. Šinkūnas. *Kvadratinis trinaris.*
II. G. Stepanauskas. *Rekurenčiosios sekos.*
III. R. Kašuba. *Elementarinės matematikos uždavinių sprendimo metodai.*
IV. A.Skūpas. *Funkcija.*
V. V. Pekarskas. *Sveikoji ir trupmeninė skaičiaus dalis. Jų savybės.*
VI. P. Survila. *Kombinatorikos ir tikimybių skaičiavimo pradmenys.*
VII. L. Maliaukienė, J. Šinkūnas. *Grafai.*

II KNYGA

I. J. Šinkūnas, A. Urbonas. *Funkcija.*
II. E. Mazėtis. *Apskritimų geometrija. Įbrėžtiniai ir apibrėžtiniai daugiakampiai. Taisyklingieji daugiakampiai.*
III. B. Vasylienė. *Skaičiaus modulis algebros uždaviniuose.*
IV. J. Šinkūnas. *Figūrų panašumas. Talio teorema ir jos taikymai.*
V. D. Jurgaitis. *Matematinės indukcijos metodas.*
VI. A. Urbonas. *Lygčių, nelygybių bei jų sistemų ekvivalentumas.*
VII. B. Grigelionis. *Urnų schemos ir baigtinės Markovo grandinės.*
VIII. A. Juozapavičius, J. Šinkūnas. *Koordinačių sistemos. Žemėlapiai.*

III KNYGA

I. E. Stankus. *Skaičių dalumas.*
II. R. Skrabutėnas. *Grandininės trupmenos.*
III. V. Vitkus. *Vidurkiai.*
IV. E. Mazėtis. *Vektoriai.*
V. J. Šinkūnas. *Plokščių figūrų plotai.*
VI. S. Staknienė. *Iracionaliosios lygtys ir nelygybės.*
VII. A. Apynis, E. Stankus. *Trigonometrinės lygtys ir nelygybės.*
VIII. G. Stepanauskas. *Sekos.*

IV KNYGA

I. G. Stepanauskas. *Skaičiavimo sistemos.*
II. P. Vaškas. *Antrosios eilės kreivės.*
III. L. Maliaukienė. *Įdomioji logika.*
IV. A. Urbonas. *Atvirkštinės funkcijos.*
V. A. Apynis. *Optimizavimo uždaviniai.*
VI. P. Survila. *Kombinatorikos pradmenys.*
VII. P. Survila. *Tikimybių teorijos pradmenys.*
VIII. A. Nagelė. *Kompleksiniai skaičiai.*

V KNYGA

I. O. Jablonskienė. *Planimetrijos uždaviniai.*
II. V. Pekarskas. *Antrosios eilės kreivės.*
III. G. Stepanauskas. *Skaičių daliklia.*
IV. V. Stakėnas. *Šifrai ir skaičiai.*
V. A. Apynis. *Tiesinių lygčių sistemos.*
VI. R. Skrabutėnas. *Algebrinės lygtys.*
VII. V. Vitkus. *Brėžimo uždaviniai.*
VIII. R. Kašuba. *Sudėtis, atimtis ir daugyba stulpeliu bei dalyba kampu.*

VI KNYGA

I. A. Bakštys. *Finansų matematika.*
II. E. Mazėtis. *Geometrinės transformacijos.*
III. B. Galbogienė. *Funkcijos reikšmių sritis.*
IV. V. Stakėnas. *Paskalio trikampis.*
V. A. Apynis. *Tiesinių lygčių sistemų taikymo uždaviniai.*
VI. L. Narkevičius. *Invariantų metodas.*
VII. J. Šinkūnas. *Tiesinės rekurenčiosios sekos.*
VIII. A. Apynis. *Uždaviniai su parametru.*